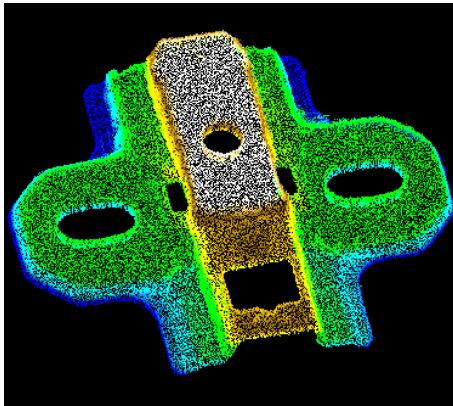


aib - Automation durch integrierte Bildverarbeitung
- Workshop 5 -



Softwaremodule zur Verarbeitung von 3D-Daten

Dipl.-Ing. Frank Gaßmann
Zentrum für Bild- und Signalverarbeitung (ZBS) e. V.

Kontakt:	ZBS e.V., G-Kirchhoff-Str. 5, 98693 Ilmenau
Email:	gassmann@zbs-ilmenau.de
URL:	http://www.zbs-ilmenau.de
Tel.:	+49 3677 2010304
Fax:	+49 3677 2010302

Softwaremodule (und Verfahren) zur Verarbeitung von 3D-Punktwolken


- **Homogenisierung / Ausdünnung von Punktwolken und Triangulationen**
- **Segmentierung der Randpunkte von Formelementepunktwolken**
- **Netzrekonstruktion / Triangulation**
- **Vermessung von 2D- und 3D-Regelgeometrien**

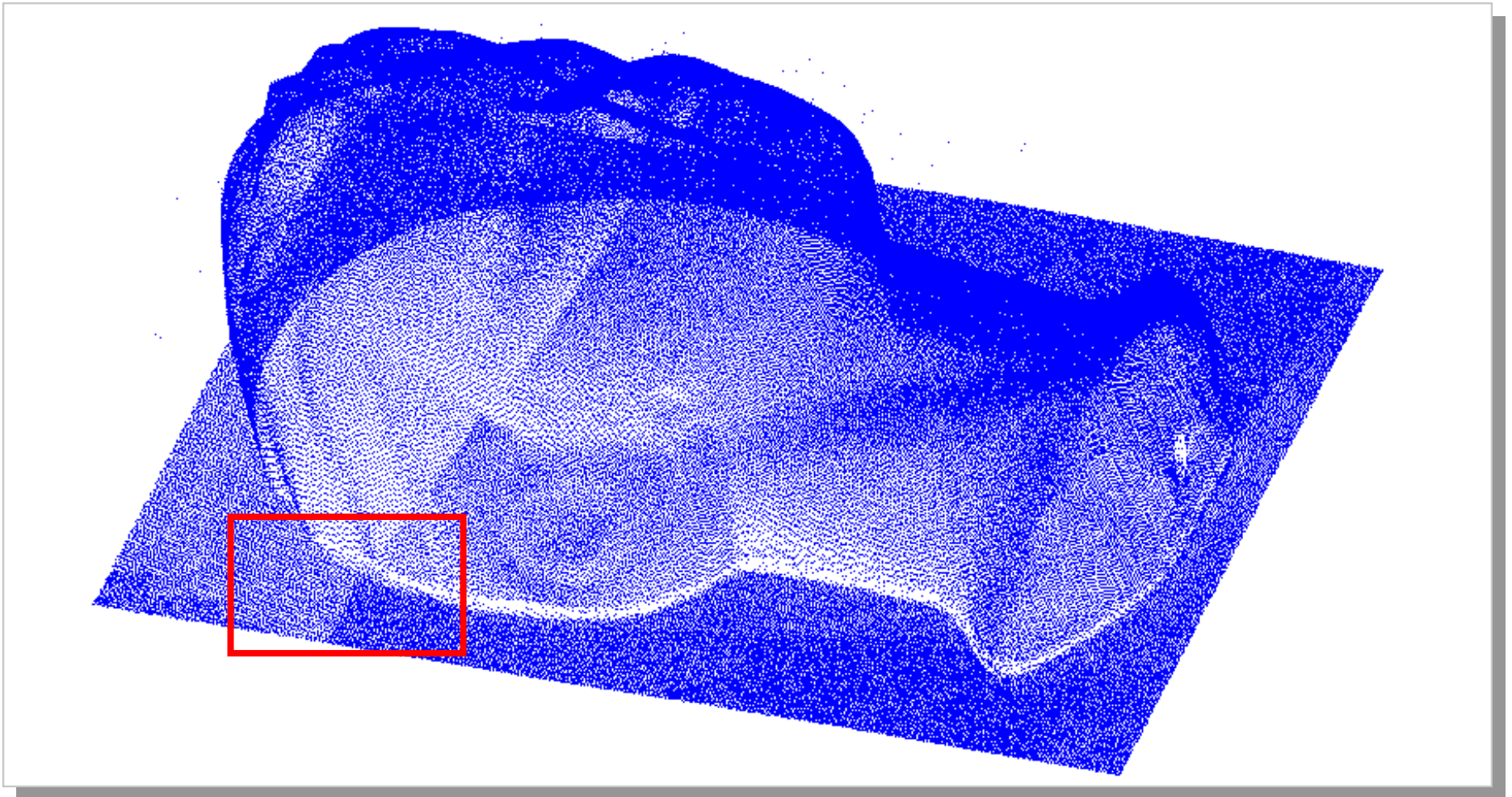
Punktwolken aus 3D-Digitalisierungssystemen

Gegenstand von Verarbeitungsverfahren

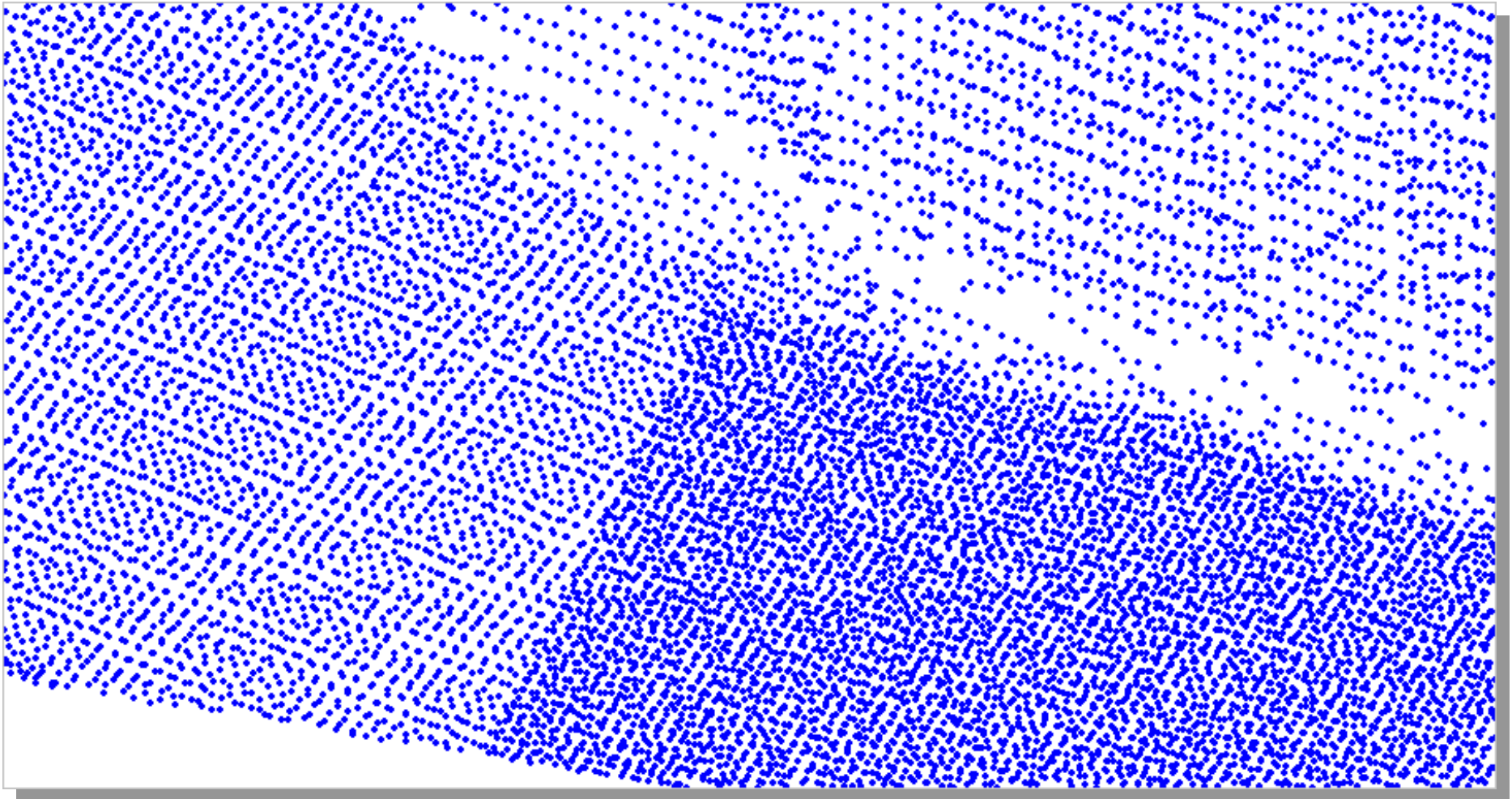
- ▶ **in den Bereichen: CAD, Reverse Engineering, Qualitätskontrolle, ...**
- ▶ **Vorverarbeitung:** Beseitigung von Meßfehlern, Redundanzen, Datenreduktion, Regularisierung, Realisierung anwendungsspezifischer Punktverteilungen, Glättung, Registrierung von Teildatensätzen, ...
- ▶ **Verarbeitung:** Flächenrückführung (Triangulation, Segmentierung von Regelgeometrien, Patchsegmentierung freigeformter Bereiche, Kantendetektion, Volumenrekonstruktion für Stereolithografie, ...), Vermessung (Formelemente, Soll-Ist-Vergleich), Fräsbahngenerierung
- ▶ Verarbeitung aufgrund unterschiedlicher Anwendungsfälle und zur Beseitigung unerwünschter Punktwolkeneigenschaften

Eigenschaften der Rohpunktwolken

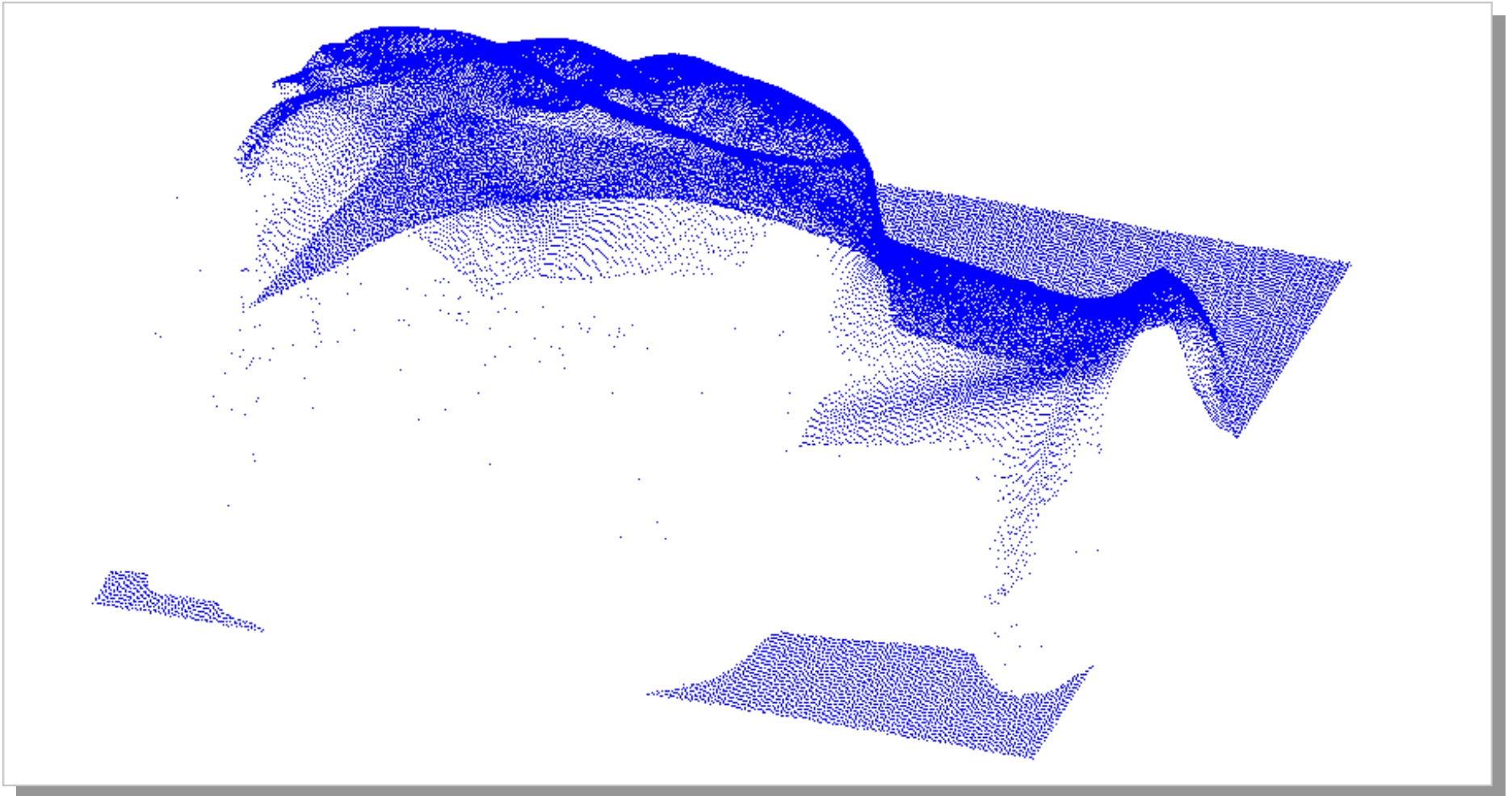
- | | | |
|---------------------------|--|------------------------------------|
| ▶ sehr große Datenmengen |  | ▶ Speicherplatz ↑ |
| ▶ erhebliche Redundanz | | ▶ Verarbeitungsdauer ↓ |
| ▶ inhomogene Punktwolken | | ▶ Weiterverarbeitung eingeschränkt |
| ▶ fehlende Strukturierung | | |



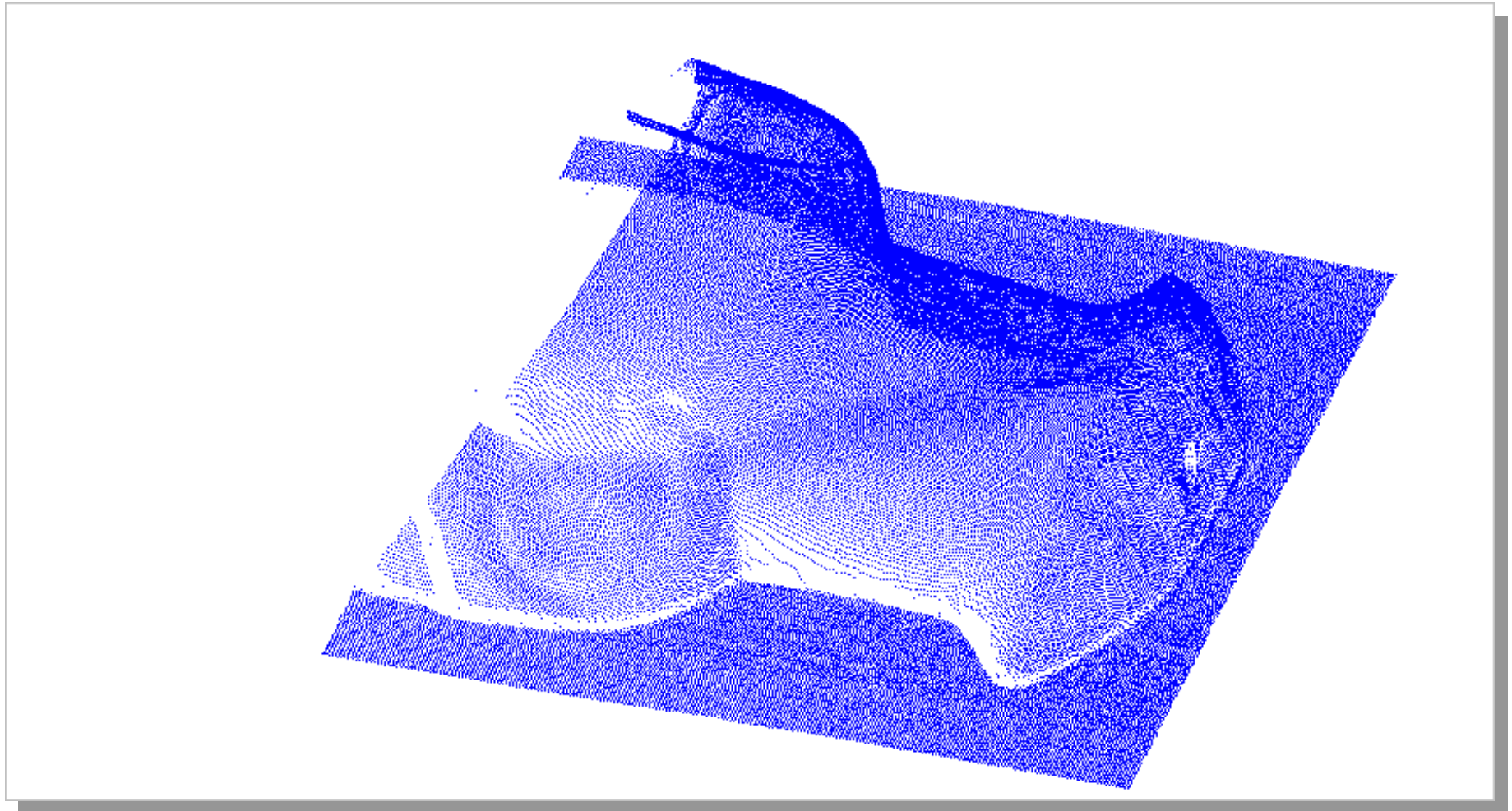
Büste, Rohpunktvolke, 600.000 Punkte (mit freundlicher Genehmigung des IOF Jena)



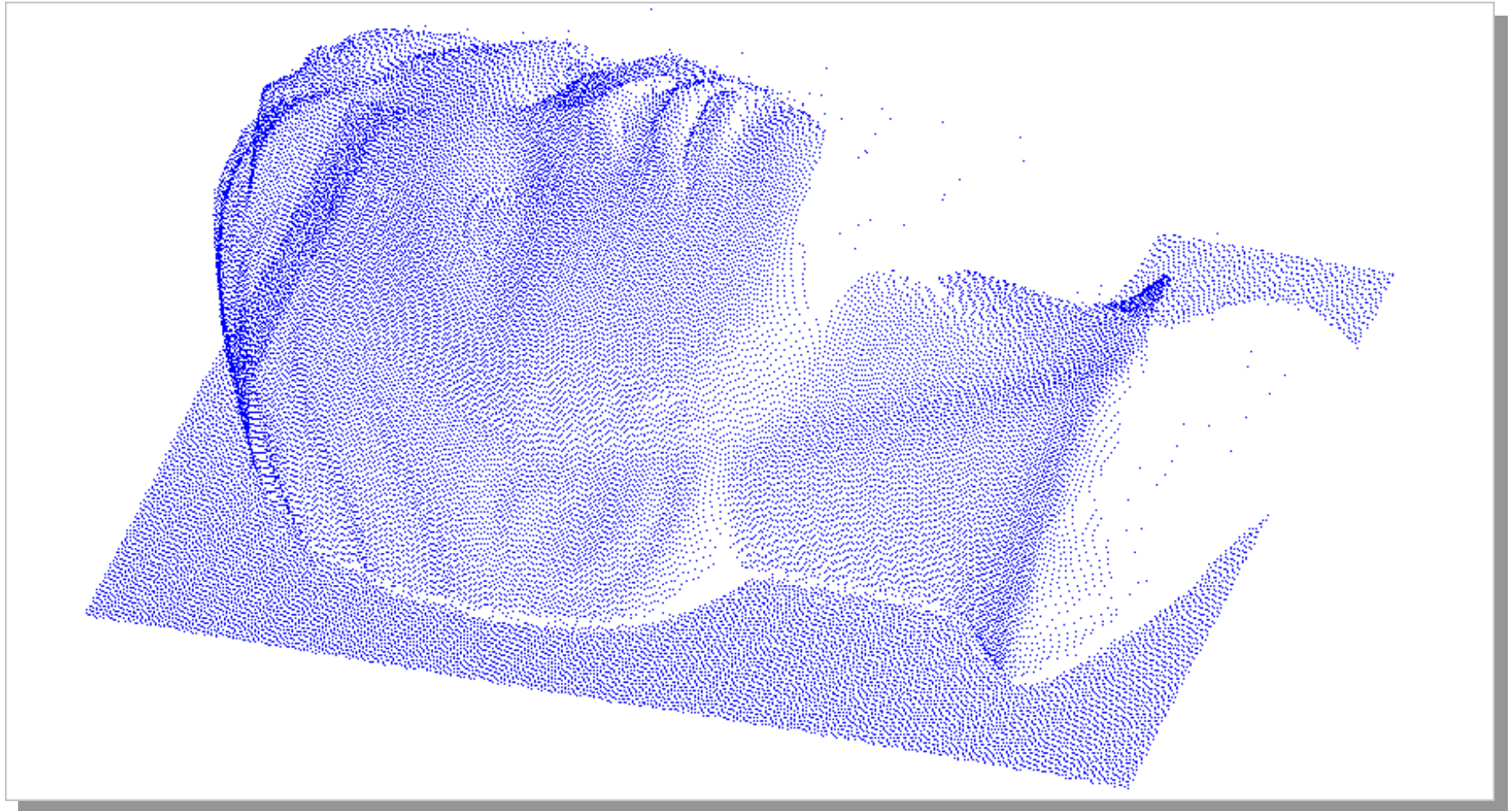
Büste, Rohpunktwolke, Detailansicht



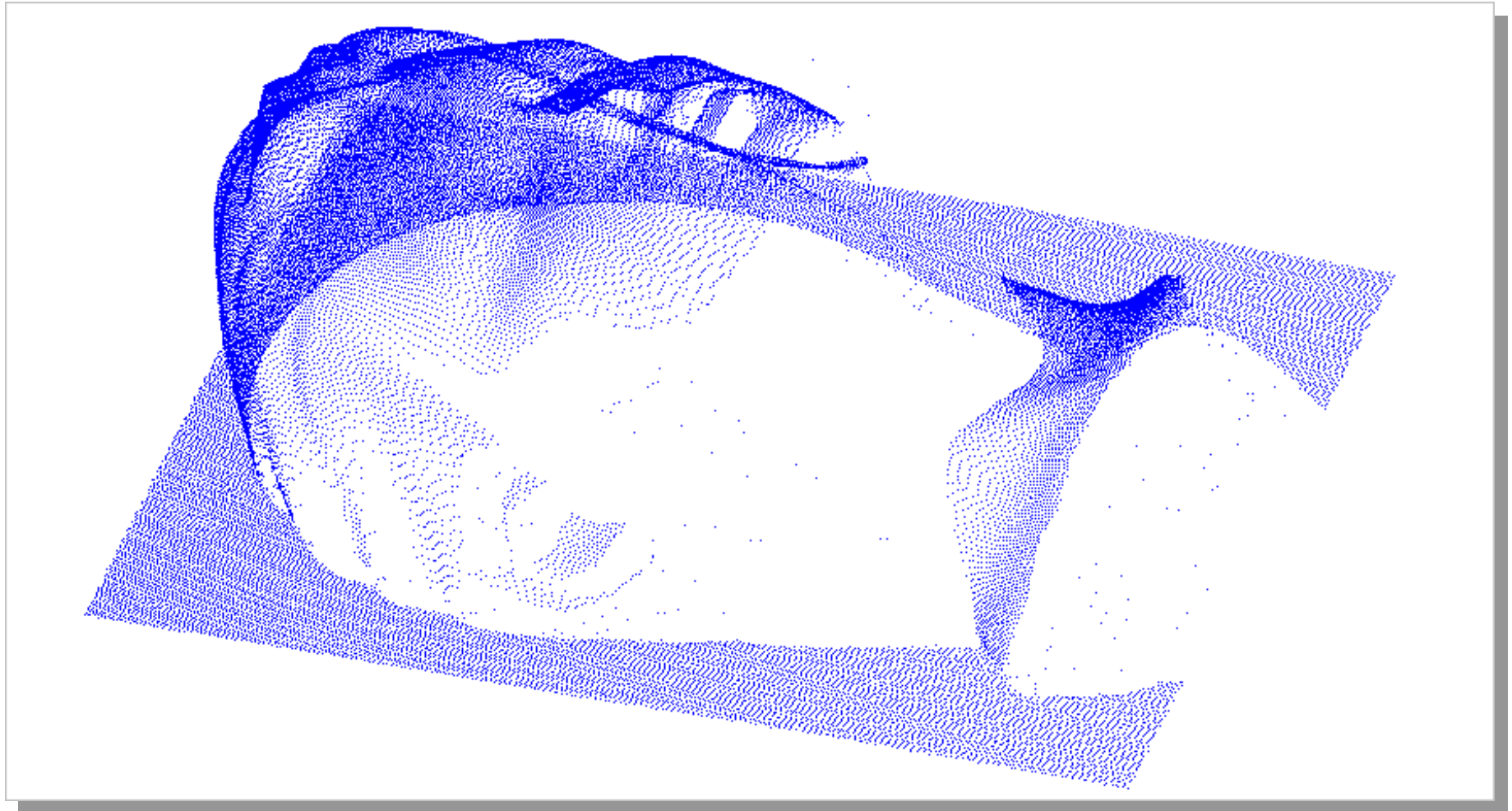
Büste, Rohpunktvolke, Bereichsbild Kamera 1, 120.000 Punkte



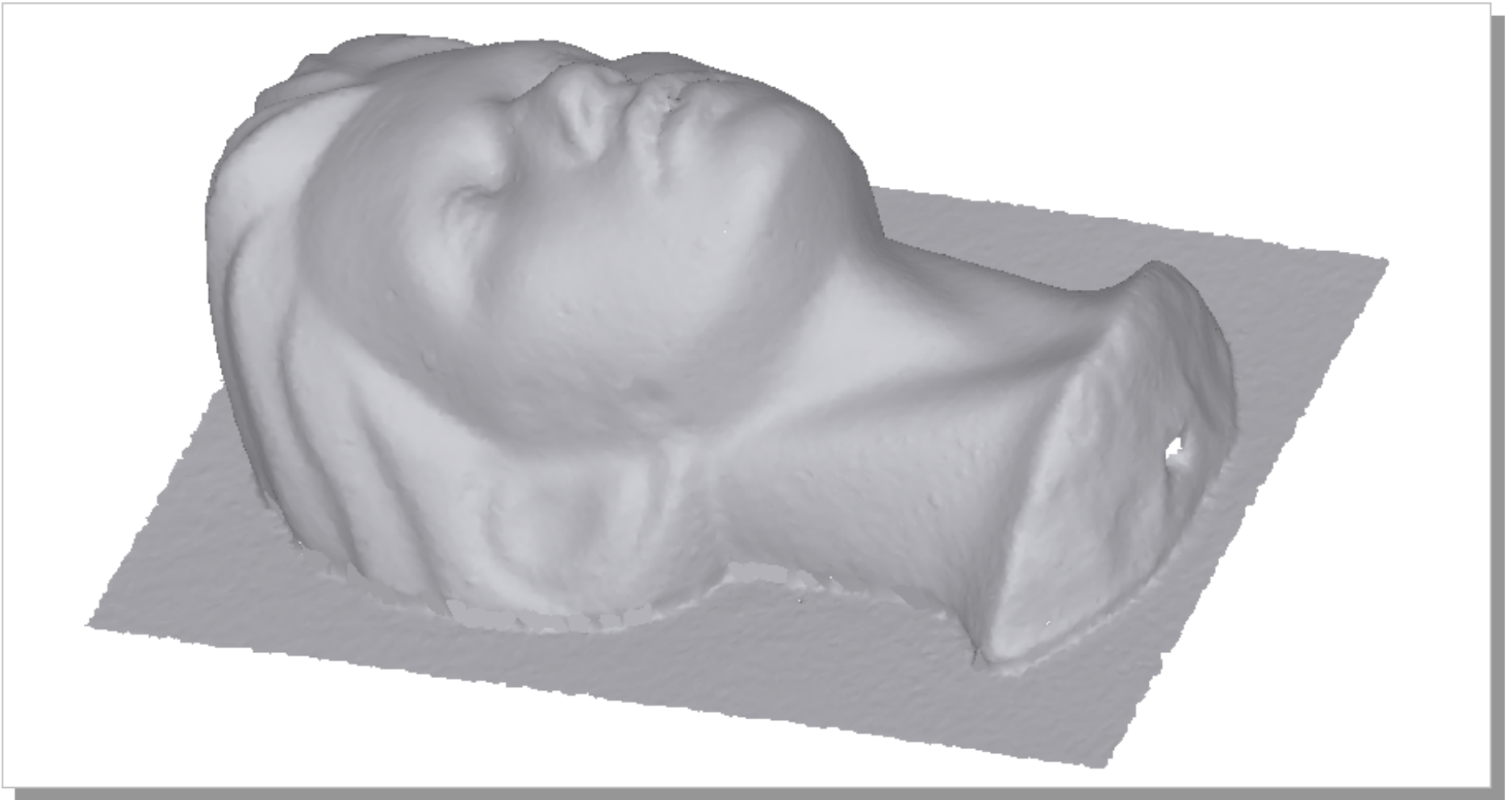
Büste, Rohpunktvolke, Bereichsbild Kamera 2, 100.000 Punkte



Büste, Rohpunktvolke, Bereichsbild Kamera 3, 220.000 Punkte

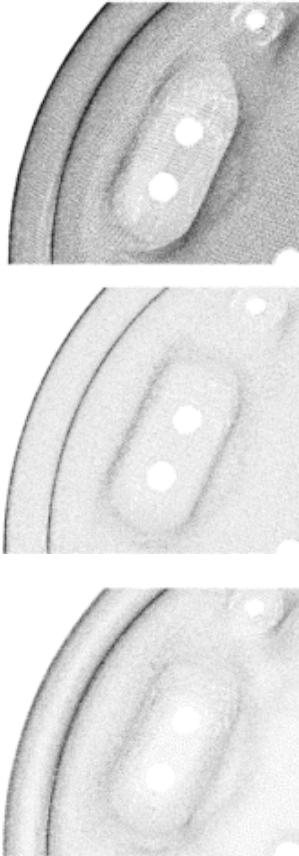


Büste, Rohpunktvolke, Bereichsbild Kamera 4, 160.000 Punkte



Büste, Rohpunktvolke trianguliert, schattierte Darstellung

Homogenisierung: Anforderungen



- ▶ **homogenes Ausdünnen, wahlweise Berücksichtigung der Krümmung der Objektoberfläche**
- ▶ **anwendbar auf Punktwolken oder Triangulationen**
- ▶ **einfache Handhabung durch automatische Festlegung von Bearbeitungsparametern**
- ▶ **Berücksichtigung und Verwendung von Qualitätsangaben zu den Datenpunkten**
- ▶ **Verwendung räumlicher oder oberflächenbezogener Abstandsmaße zum Ausgleich von Rauschen und zum korrekten Ausdünnen unterschiedlich stark gekrümmter Gebiete**
- ▶ **Ausdünnen wahlweise durch Entfernen oder Zusammenfassen von Punkten**

Homogenisierung von Punktwolken

Ansatz:

Berechnung eines Dichtemaßes pro Punkt
flächenbezogen j/n , krümmungsabhängig j/n



Prioritätswarteschlange



solange Zielpunktzahl nicht erreicht ist:

- ▶ Punkt mit der niedrigsten Priorität entfernen
- ▶ Abstandsmaße der Nachbarpunkte und Warteschlange aktualisieren

Besonderheiten:

- ▶ hohe Ergebnisqualität durch Abstandsmaß pro 3D-Punkt
- ▶ kurze Laufzeiten durch effektive Verfahren zur Nachbarschaftssuche

Homogenisierung von Punktwolken

Details:

→ Krümmungsberechnung

- ▶ pro Punkt: Approximation der Umgebungspunkte durch biquadratisches Polynom, Hauptkrümmungen aus den Polynomkoeffizienten

→ Abstandsmaße

- ▶ räumlich: euklidischer Punktabstand zum nächstliegenden Nachbarpunkt
- ▶ oder flächenbezogen: Abstand des nächstliegenden projizierten Punkts in Tangentialebene (Ausgleich von Rauschen und klaffenden Teildatensätzen)

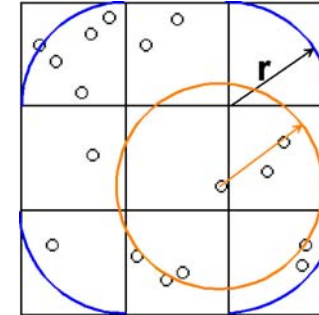
→ Nachbarschaftssuche

- ▶ 3D-Gitterverfahren für die schnelle Beantwortung von Suchanfragen (Bereichssuche, Nächste-Nachbar-Suche)

Gitterverfahren für 3D-Suchanfragen

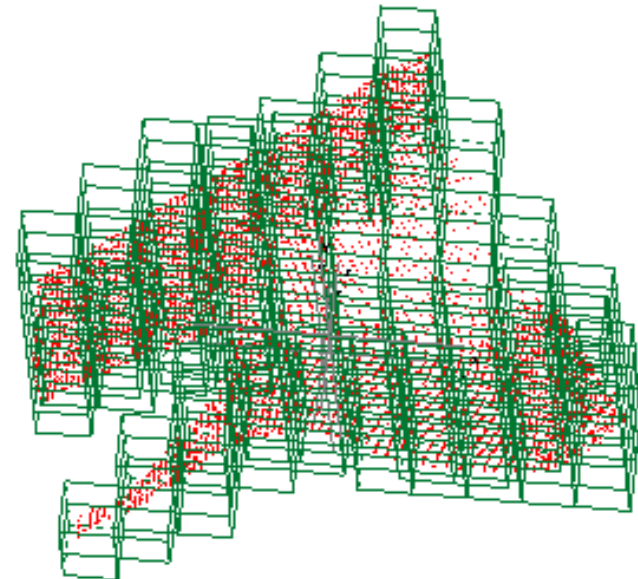
Prinzip:

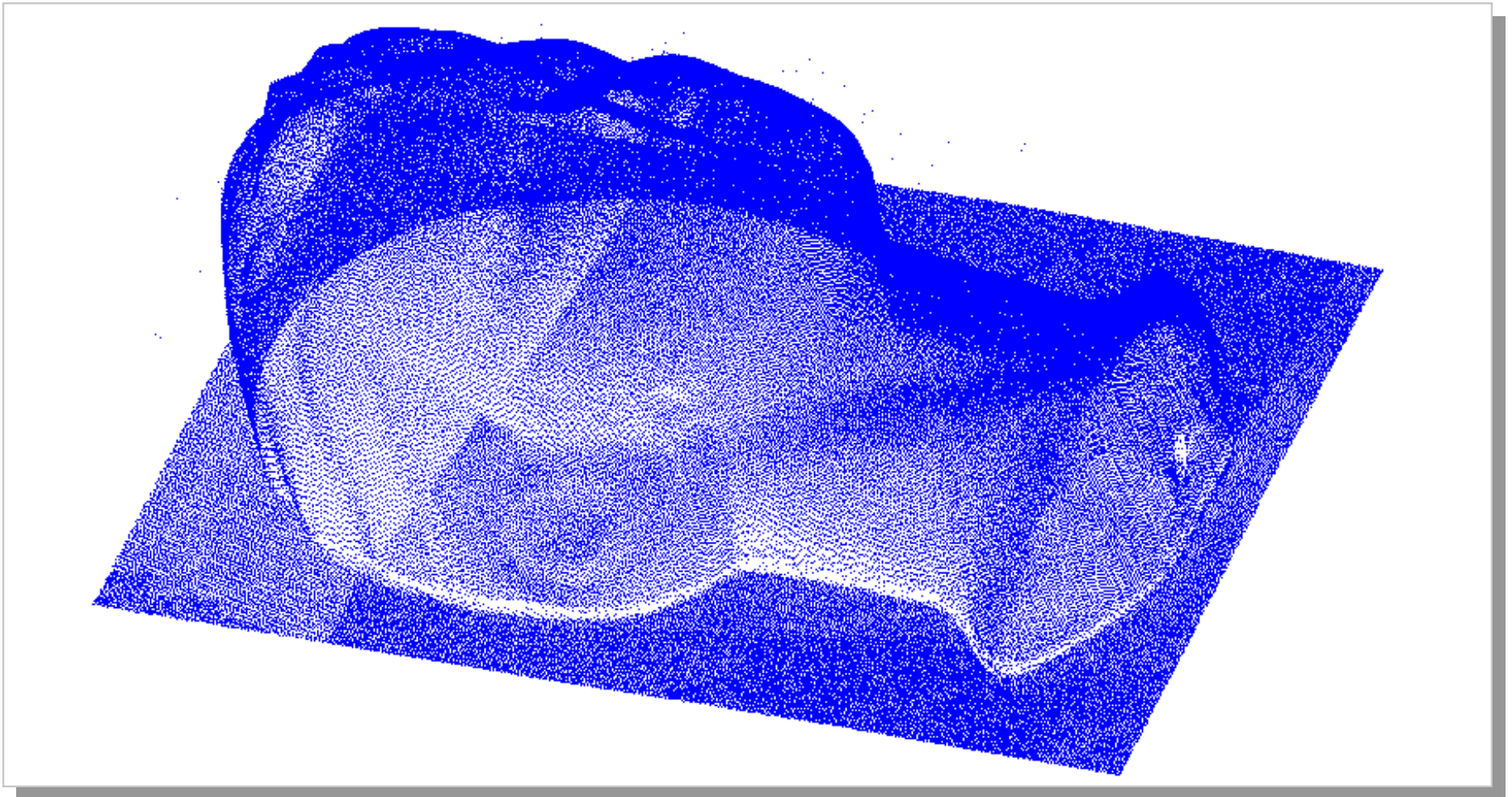
- ▶ Zerlegung der Punktmenge in Raumzellen
- ▶ jede Raumzelle kennt die enthaltenen Punkte sowie die unmittelbaren Nachbarzellen



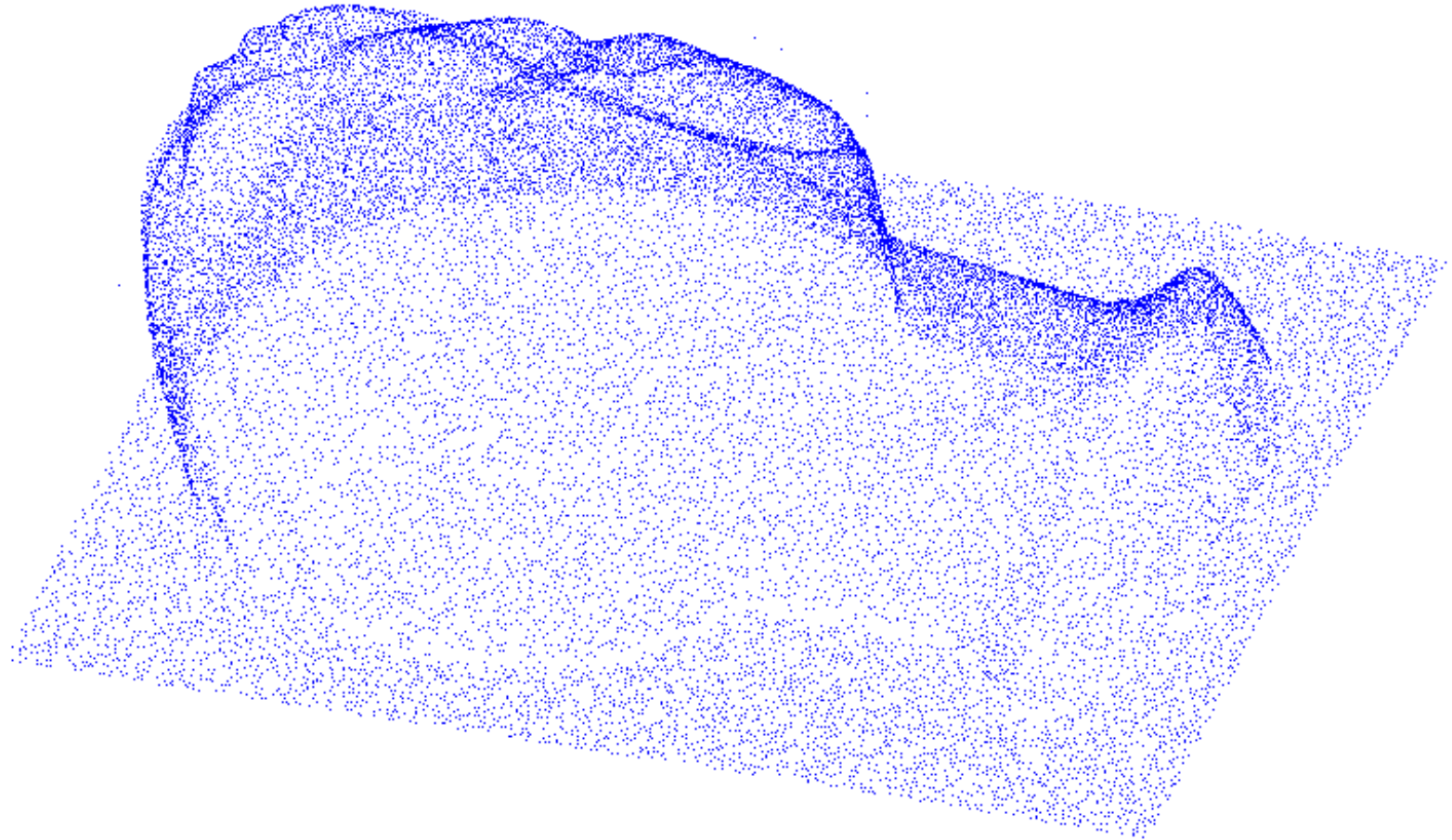
Eigenschaften:

- ▶ schnelle Realisierung von Suchanfragen
- ▶ gute Eignung für Bereichsanfragen und Nächste-Nachbar-Suche
- ▶ geringer Speicherbedarf
- ▶ moderater Implementierungsaufwand

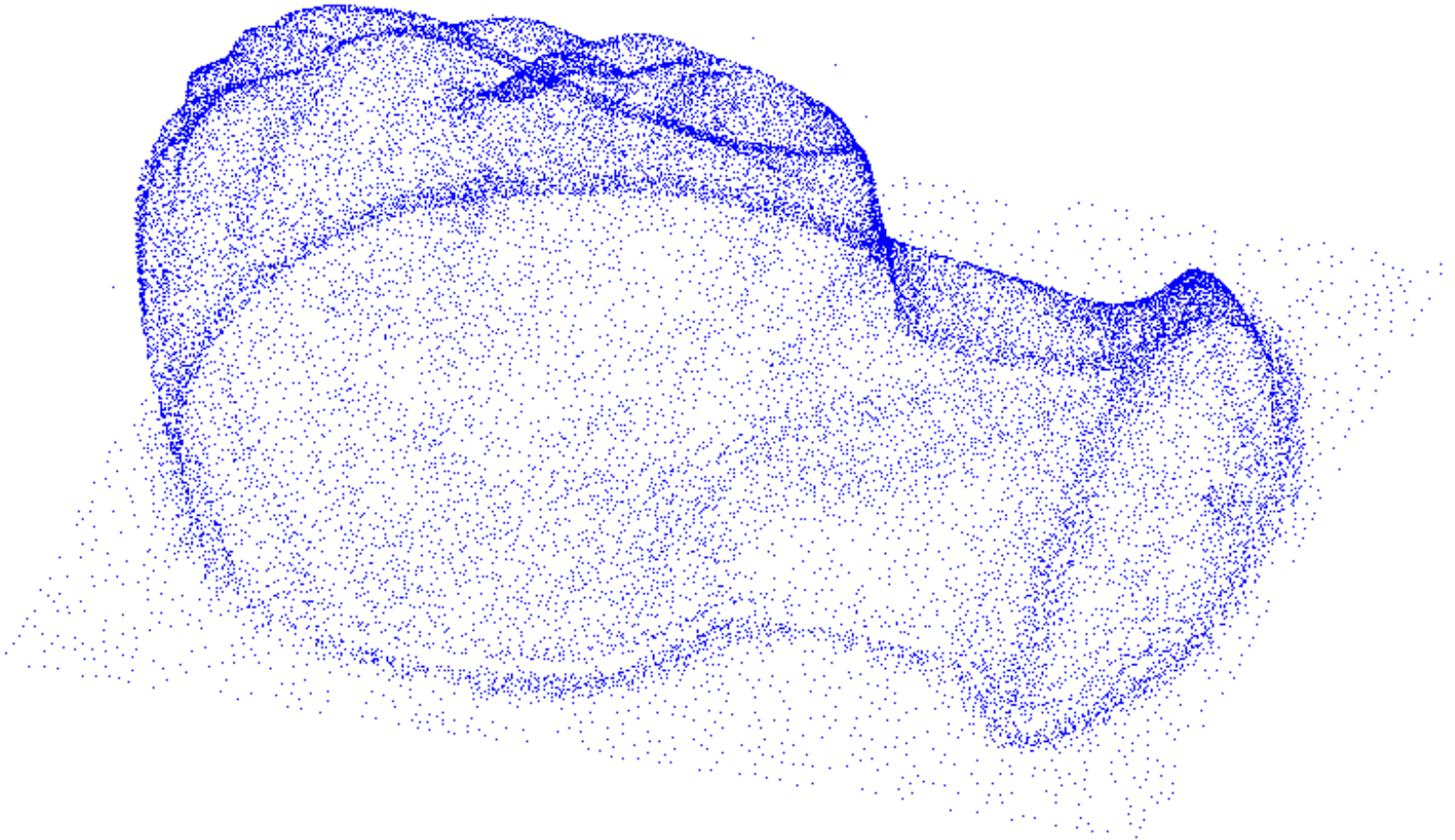




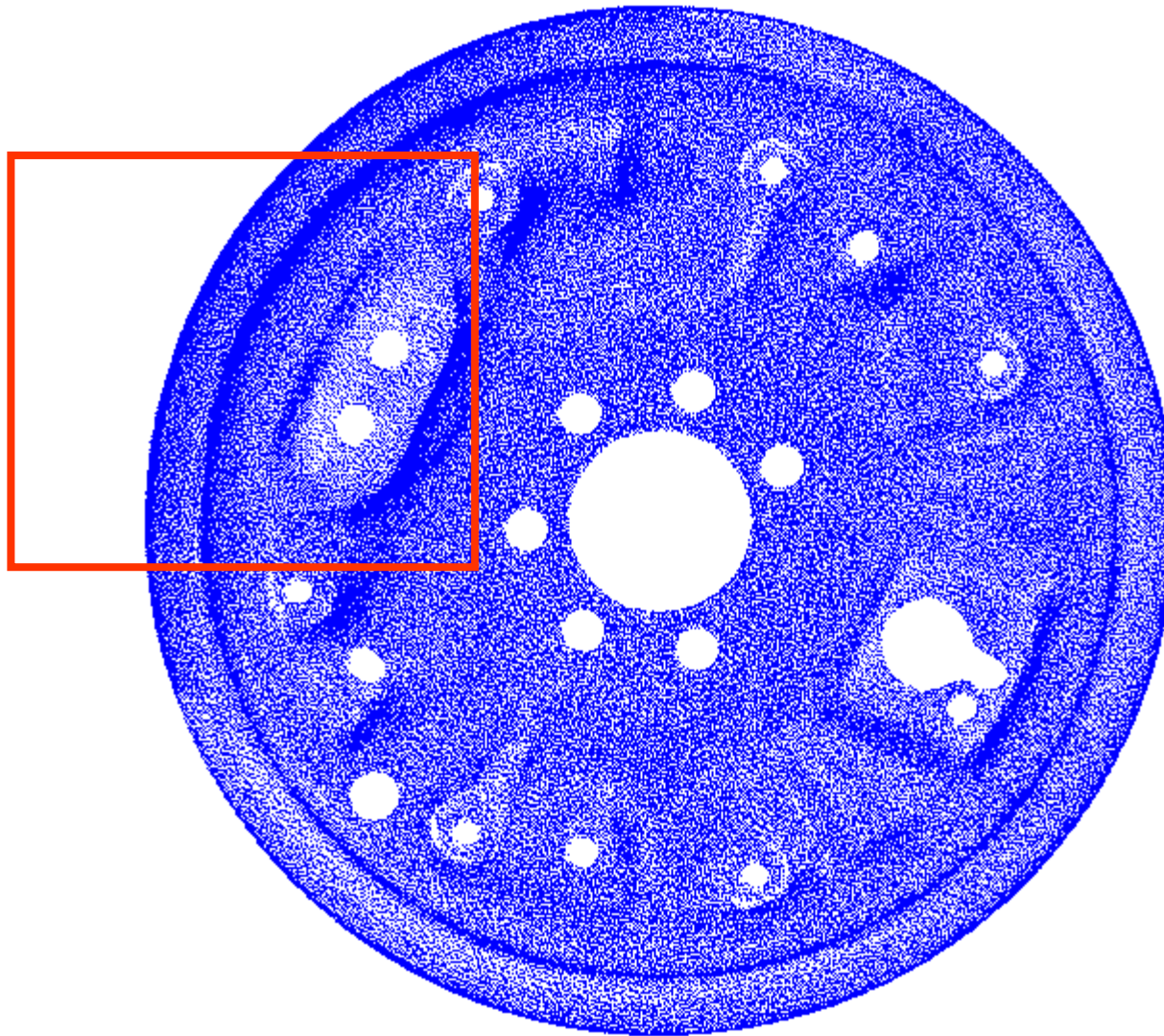
Büste, Rohpunkt wolke, 600.000 Punkte



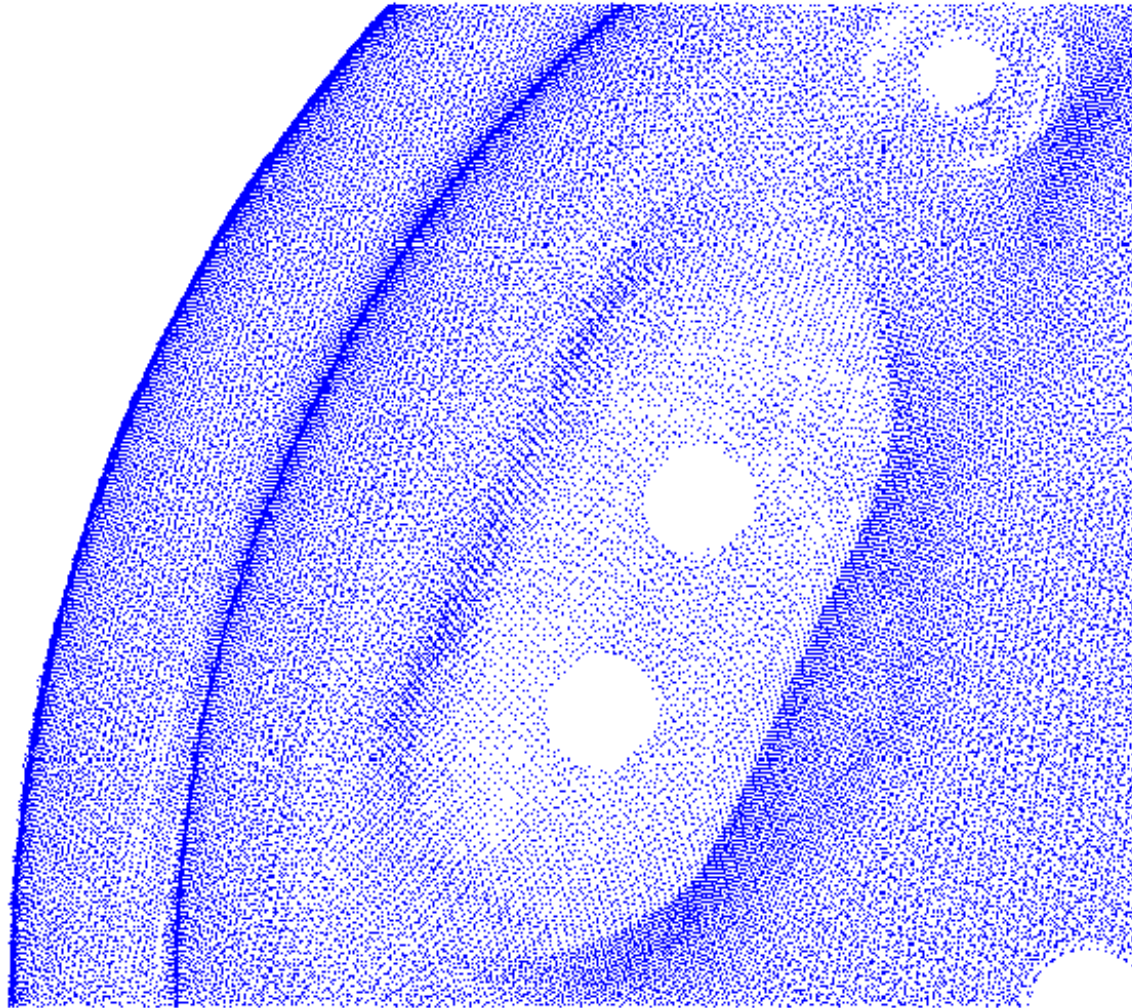
Büste, gleichabständig homogenisiert, 50.000 Punkte



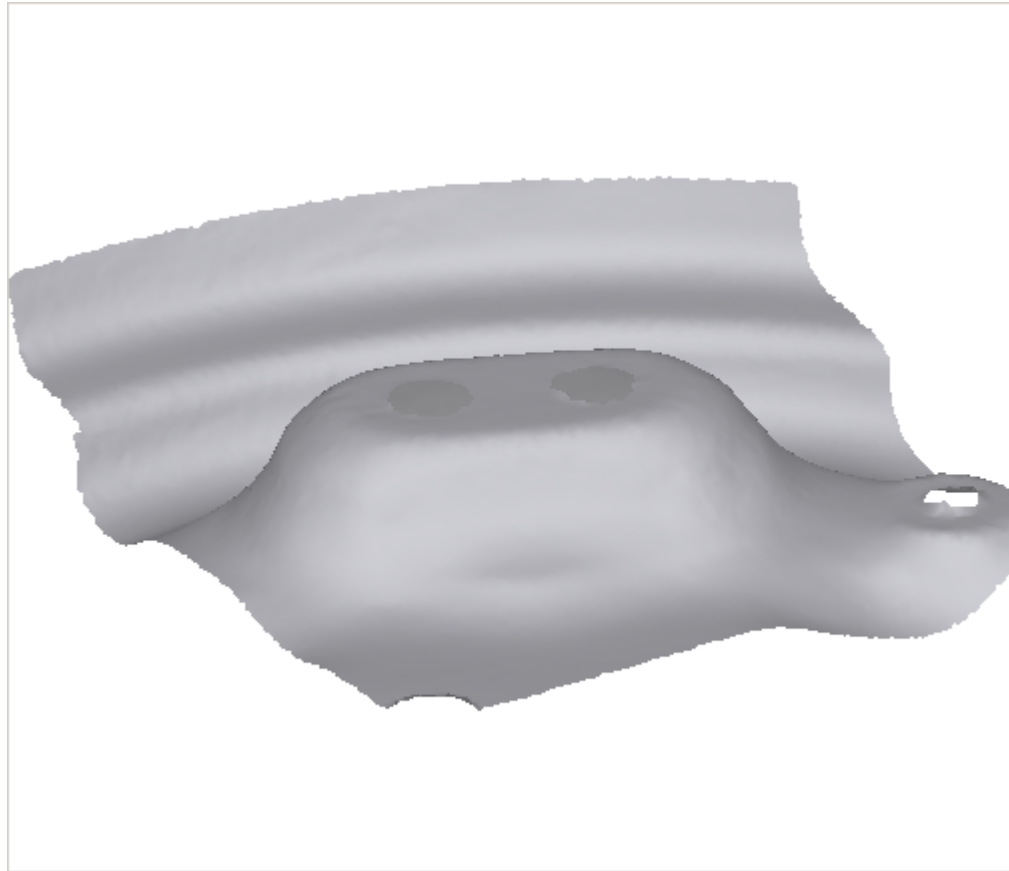
Büste, krümmungsabhängig homogenisiert, 50.000 Punkte



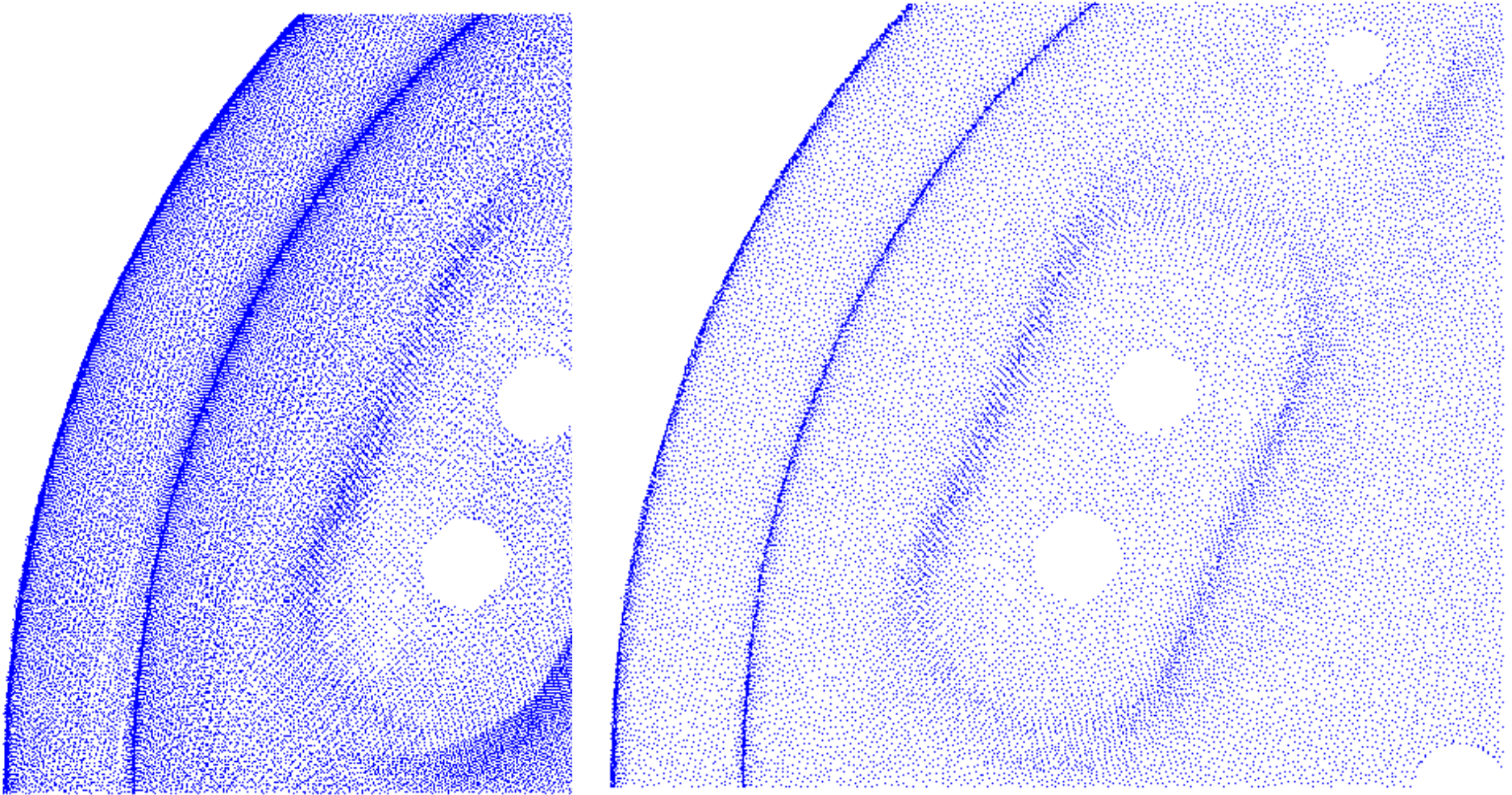
Rohpunktwolke:
Bremstrommel,
450000 Punkte



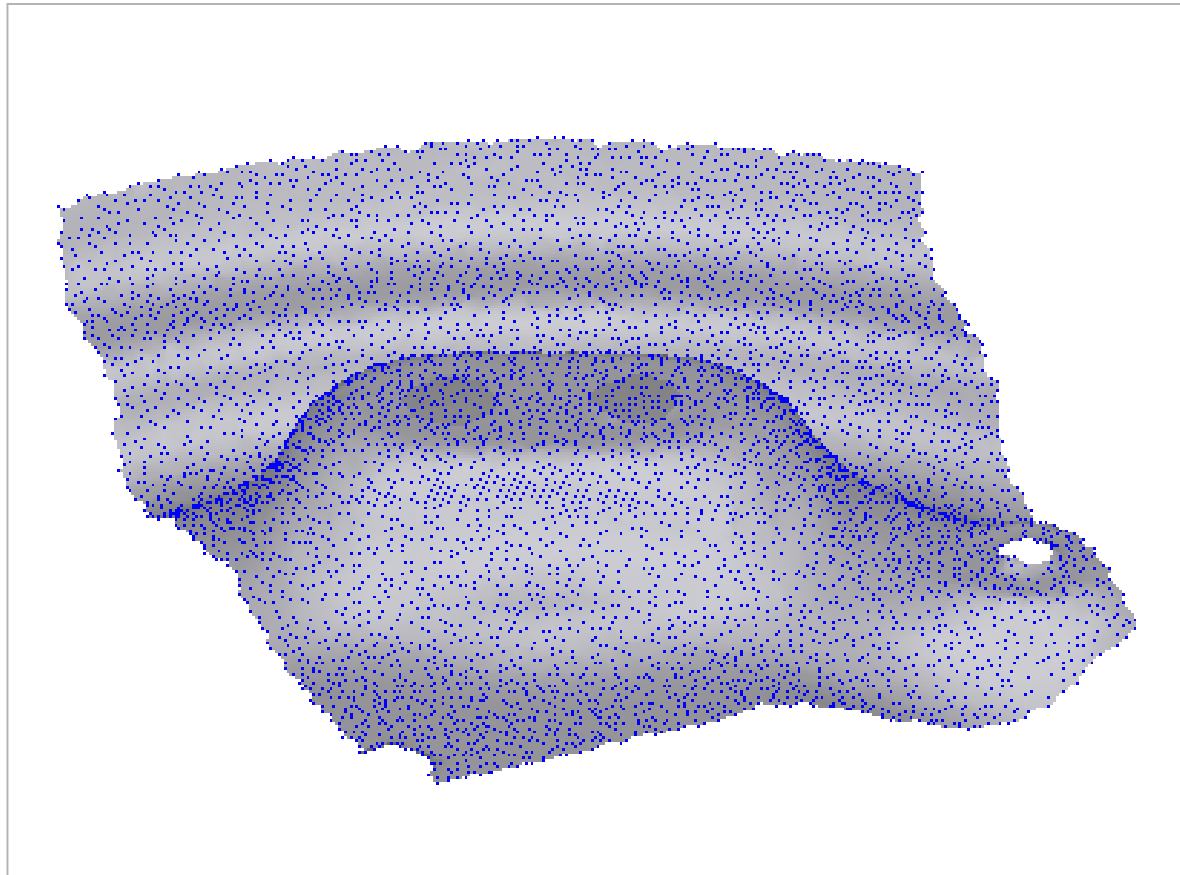
Bremstrommel, Detail



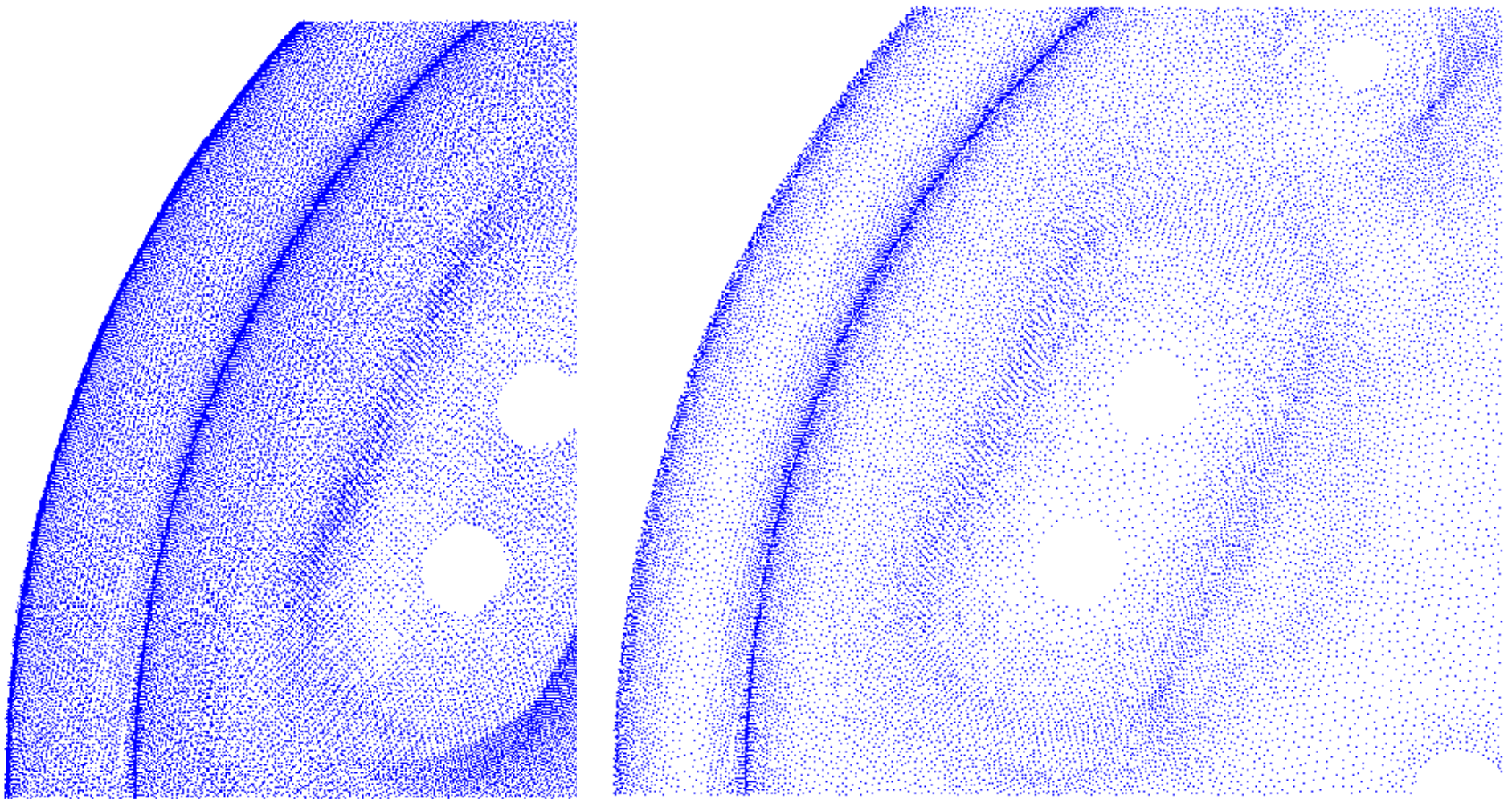
Bremstrommel, Detail



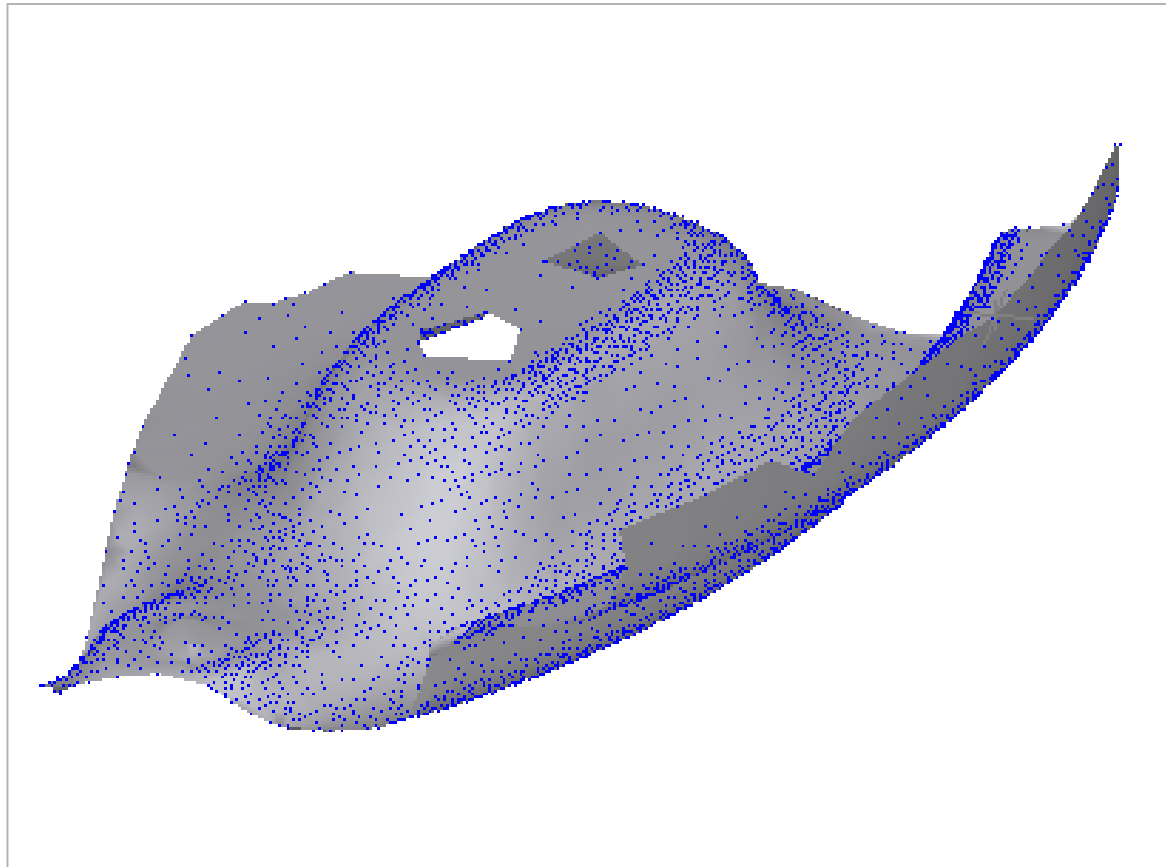
Bremstrommel, Detail, gleichabständig homogenisiert



Bremstrommel, Detail, gleichabständig homogenisiert



Bremstrommel, Detail, krümmungsabhängig homogenisiert



Bremstrommel, Detail, krümmungsabhängig homogenisiert

Homogenisierung von Triangulationen

Ansatz:

Berechnung eines kombinierten Krümmungs- / Dichtemaßes
pro Dreieckskante



Prioritätswarteschlange



solange Zielpunktzahl nicht erreicht ist:

- ▶ Kante mit der niedrigsten Priorität entfernen
- ▶ Prioritäten der Nachbarkanten und Warteschlange aktualisieren

Besonderheiten:

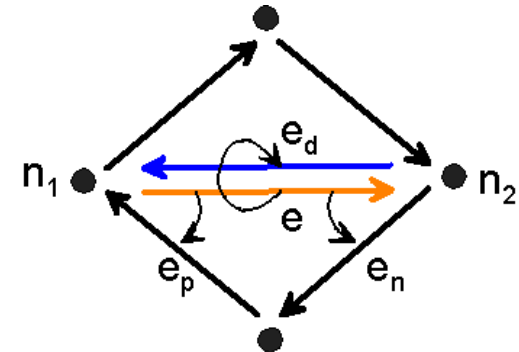
- ▶ hohe Ergebnisqualität durch Abstandsmaß pro 3D-Kante
- ▶ kurze Laufzeiten durch effektive Datenstruktur für Triangulation

Homogenisierung von Triangulationen

Details:

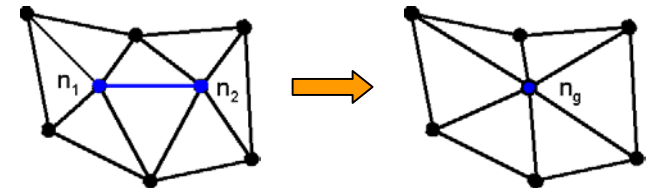
Gitterrepräsentation

- Winged-Edge-Struktur (Repräsentation jeder Kante durch ein Paar gerichteter Kanten, Referenzierung von Vorgänger- und Nachfolgekanten)



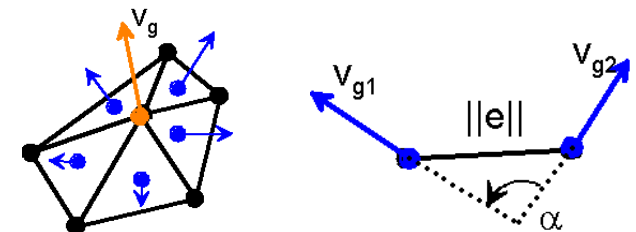
Kanten entfernen

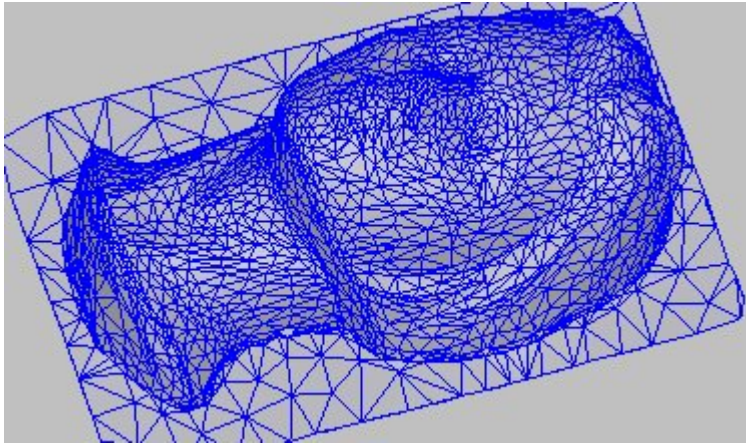
- durch Kollabieren einer Kante, die beiden Kantenknoten verschmelzen oder ein Kantenpunkt entfällt



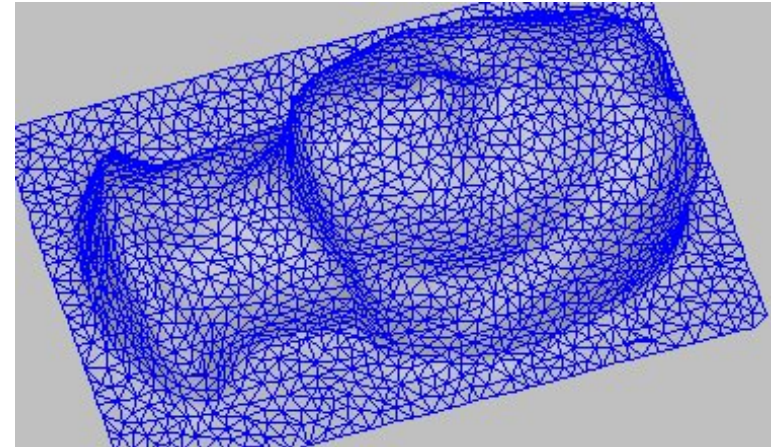
Kantenpriorität

- Änderung des Flächeninhalts beim Entfernen der Kante: gewichtetes Produkt von Krümmungsmaß (Winkel zwischen den Normalenvektoren der beiden Kantenpunkte) und Abstandsmaß (Kantenlänge)

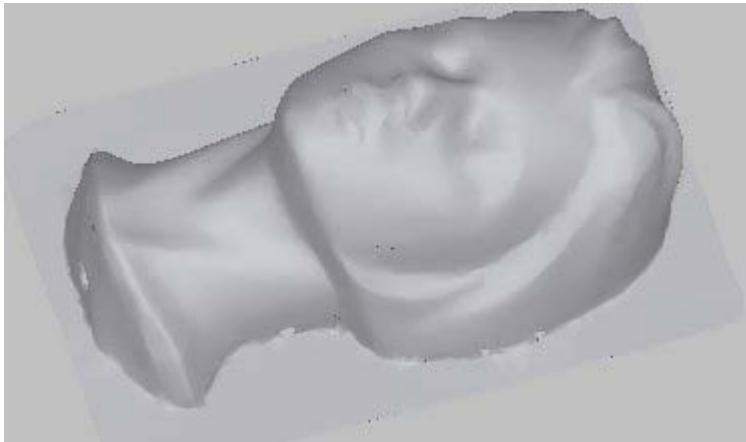




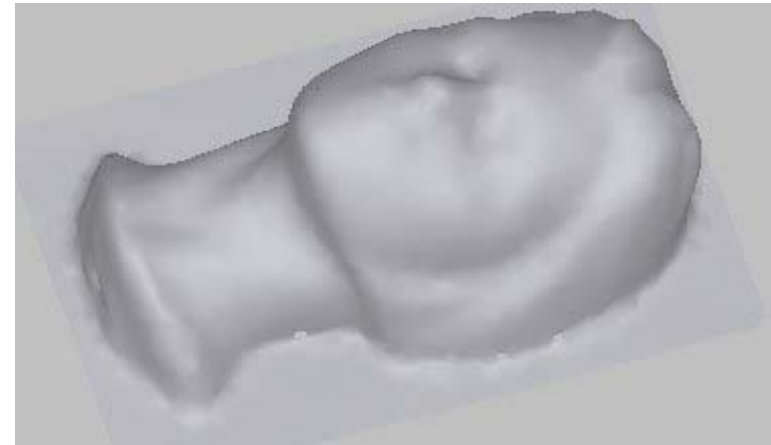
Gitterreduktion krümmungsabhängig, schattierte Ansicht mit überlagertem Dreiecksgitter



Gitterreduktion gleichabständig, schattierte Ansicht mit überlagertem Dreiecksgitter

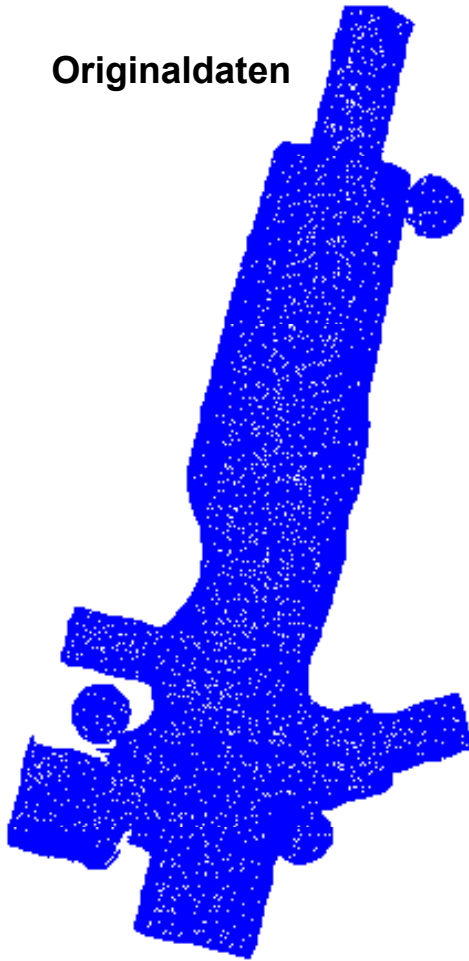


Gitterreduktion krümmungsabhängig, schattierte Ansicht

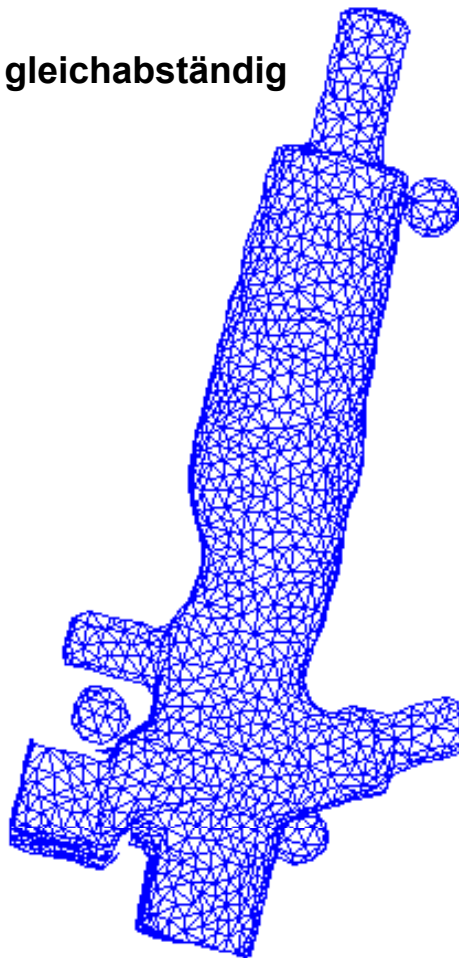


Gitterreduktion gleichabständig, schattierte Ansicht

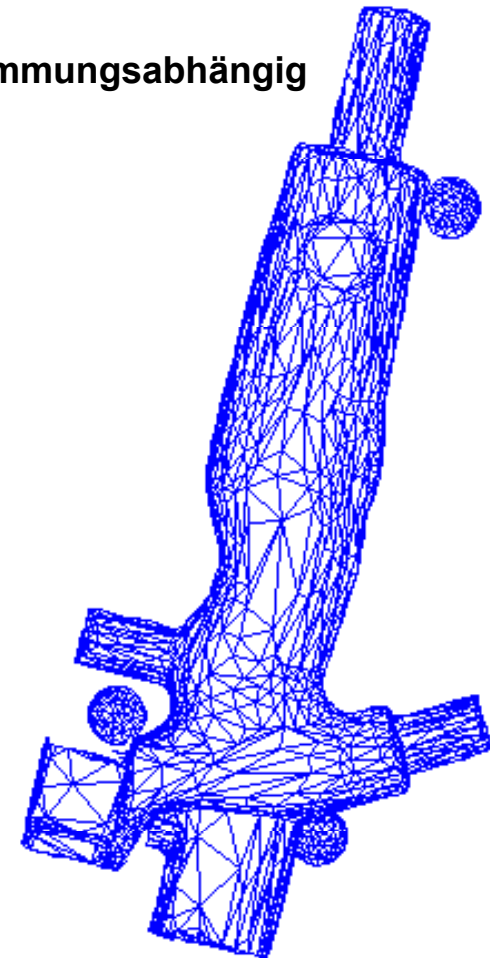
Originaldaten



gleichabständig



krümmungsabhängig



Spritzgußteil, ILMCAD GmbH Ilmenau, Laserscanner CyLan®3D / INTECU GmbH

Softwaremodul zur Homogenisierung

Input:

- ▶ ungeordnete Punktwolke oder Triangulation

Parameter:

- ▶ Flag für Homogenisierungsart (gleichabständig / krümmungsabhängig)
- ▶ Gewicht für Krümmungseinfluss
- ▶ Flag für Art des Abstandsmaßes (Berechnung auf Basis Oberflächenprojektion j/n)
- ▶ Grenzwert für maximal zulässigen Punktabstand
- ▶ Flag für Punktmanipulation (Punkte entfernen oder zusammenfassen)
- ▶ Reduktionsfaktor oder Zielpunktzahl

Output:

- ▶ homogenisierte ungeordnete Punktwolke oder Triangulation

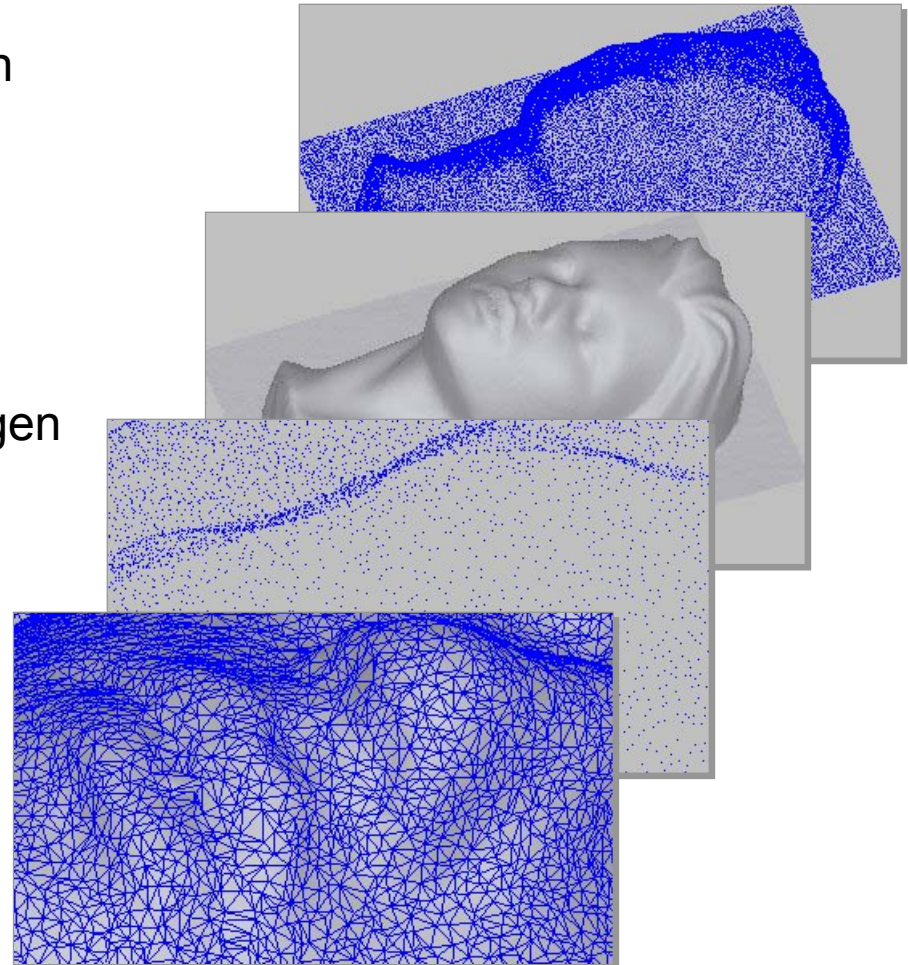
Softwaremodul zur Homogenisierung

Eigenschaften:

- ▶ **robustes und qualitativ hochwertiges Verfahren**
- ▶ **automatische Parametrisierung möglich**
- ▶ **Qualitätsangaben zu den Datenpunkten können berücksichtigt werden**
- ▶ Homogenisierung wahlweise durch Entfernen oder Zusammenfassen von Punkten
- ▶ Verwendung oberflächenbezogener Abstandsmaße möglich
- ▶ **Laufzeit: AMD Athlon™ 2700 XP, Reduktion von 600.000 auf 250.000 Messpunkte: 30 s**

Triangulation von Punktwolken: Anforderungen

- ▶ Triangulation von unstrukturierten 3D-Punktwolken ohne a-priori-Informationen
- ▶ weitgehend automatische Parametrisierung
- ▶ robustes Verfahren, resistent gegen Ausreißer, Dichteschwankungen und Rauschen
- ▶ Verarbeitung beliebiger Punktanzahlen
- ▶ niedrige Laufzeit



Triangulation von Punktwolken: Verfahrenssystematik

2D: Flächentriangulierung (Dreiecke)

3D: Volumentriangulierung (Tetraeder)



2D / 3D: im R^3 eingebettete Flächen

- ▶ erhebliche Verfahrensvielfalt
- ▶ i.A. hohe Komplexität der Verfahren
- ▶ kein Optimalalgorithmus verfügbar (2D, 3D: Delaunay-Kriterium)
- ▶ Bewertung eines Verfahrens nur über Implementierung und Probetriangulationen möglich

- ➡ Volumenorientierte Verfahren
 - ▶ Verfahren auf Delaunay - Basis
 - ▶ Alpha-shapes
 - ▶ Gamma-neighborhood graph
 - ▶ Rekonstruktion mit Mittelachsen
- ➡ Flächenorientierte Verfahren
 - ▶ Step-by-step Verfahren
 - ▶ Surface Description Graphes
- ➡ Verfahren auf Voxelbasis
 - ▶ Verfahren von Algorri und Schmitt
 - ▶ Verfahren von Curless und Levoi
- ➡ Mischformen / Sonderformen
 - ▶ Marching-cubes-Modifikationen
 - ▶ Verfahren von Bajaj u.a.
 - ▶ Kohonen feature map

Triangulation von Punktwolken

Ansatz (stark vereinfacht)

Berechnung einer Starttriangulation
pro Randkante ein Knotenkandidat mit Affinitätsmaß (Priorität)



Prioritätswarteschlange



solange noch Kandidaten:

- ▶ neues Dreieck aus Randkante + Kandidat mit der höchsten Priorität
- ▶ Abstandsmaße der Nachbarkanten und Warteschlange aktualisieren

Warum Wachstumsverfahren ?

- ▶ niedrige bis mittlere Komplexität, lineares Einstufenverfahren, überschaubar
- ▶ modifiziertes Delaunay-Kriterium für Prioritätsmaß verwendbar
- ▶ begrenzter Implementierungsaufwand

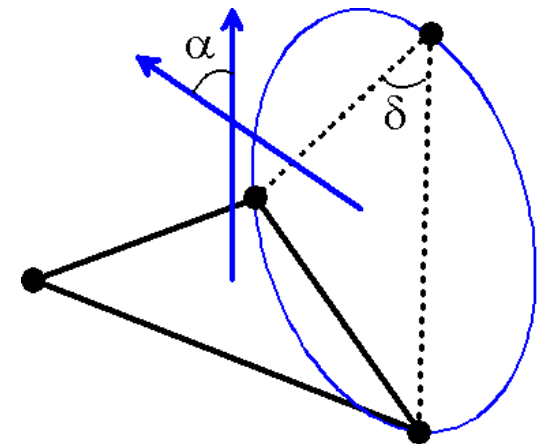
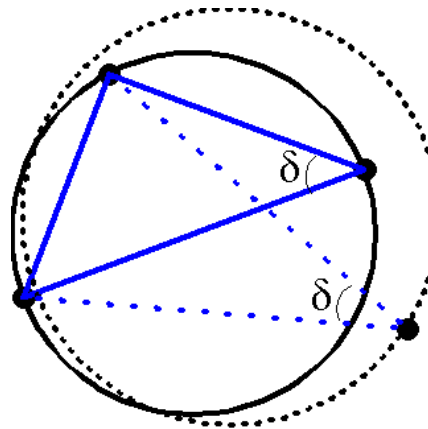
Triangulation von Punktwolken

Besonderheiten

- ▶ verteilte Starttriangulation → Qualität, Robustheit
- ▶ Wachstumsprinzip → Qualität, Robustheit
- ▶ Verwendung modifiziertes Optimalkriterium → Qualität
- ▶ Unterstützung von Suchverfahren durch sowohl geeignete Datenstruktur für Triangulation als auch Gitterverfahren für Punktwolken → Laufzeit, Speicherbedarf

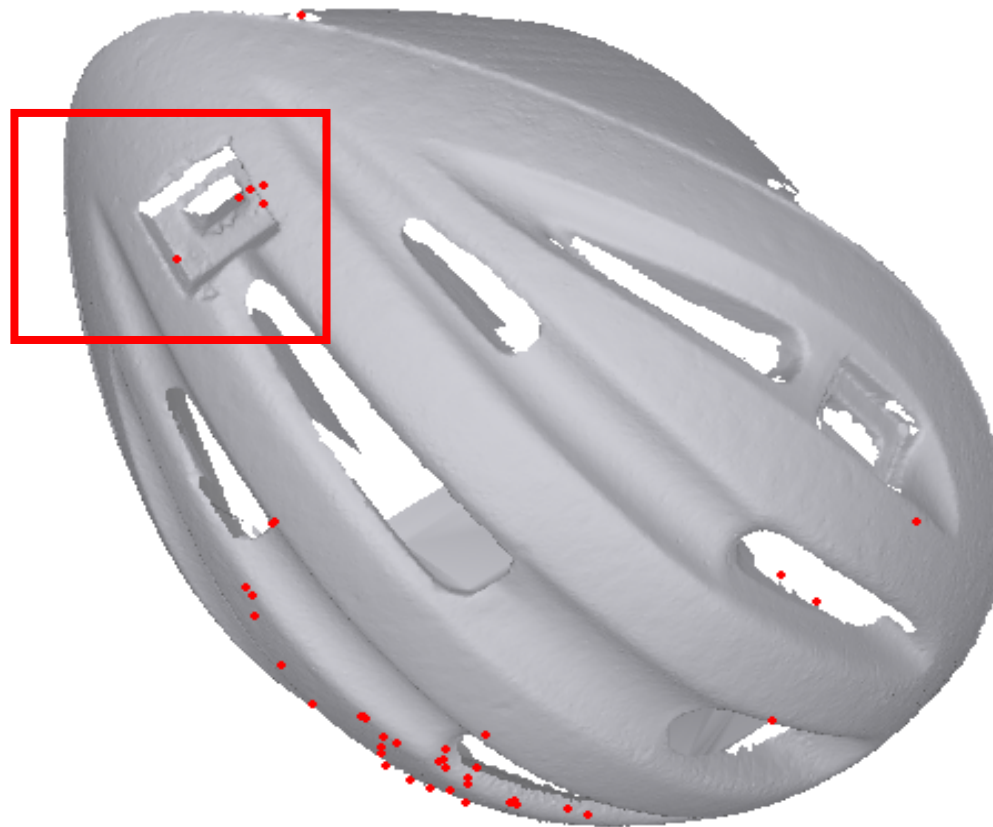
Affinitätsmaß

- ▶ Basis: 2D-Delaunay-Kriterium (kleinster Umkreis)
- ▶ Modifikation: Wichtung mit Winkel zwischen den Normalenvektoren

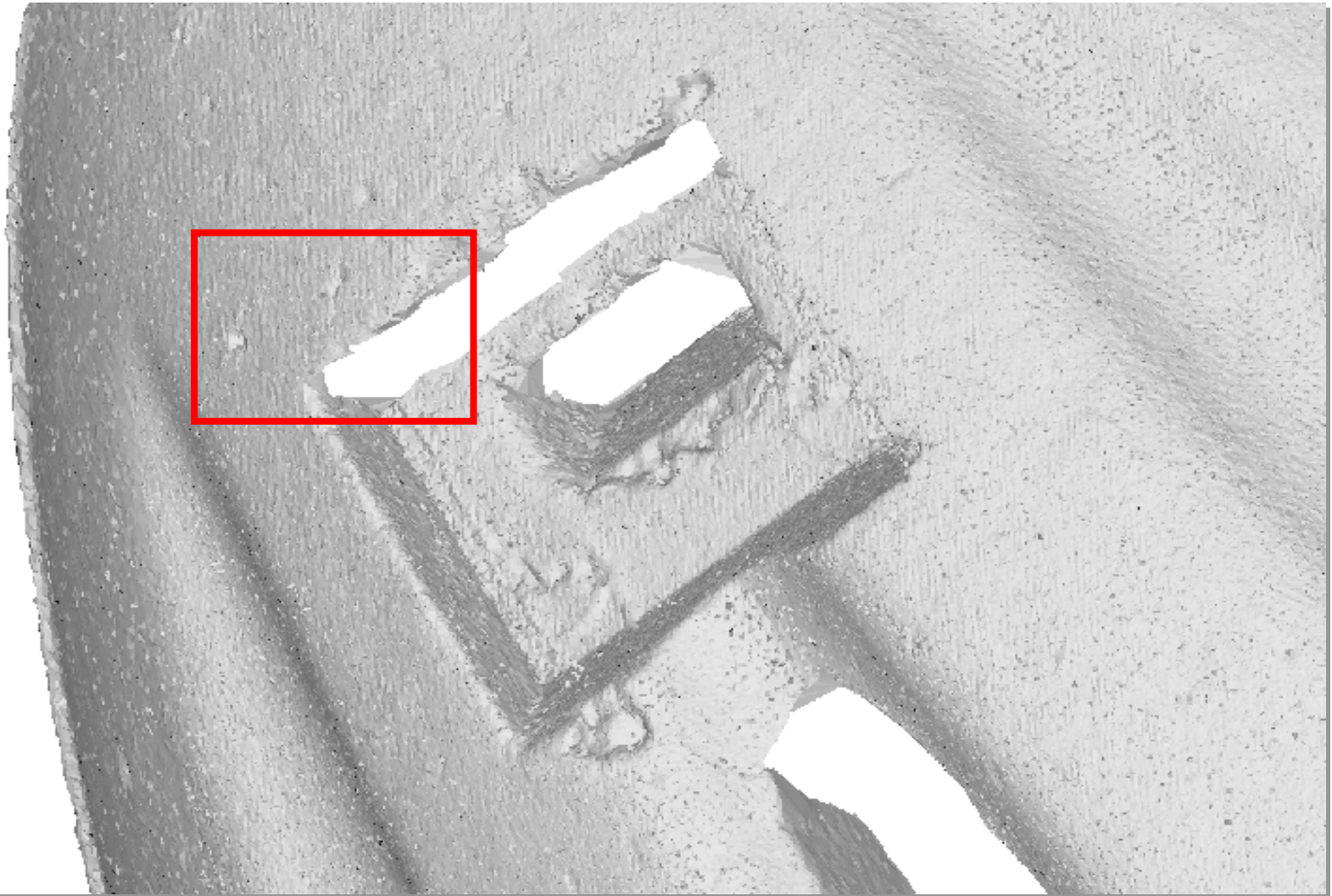




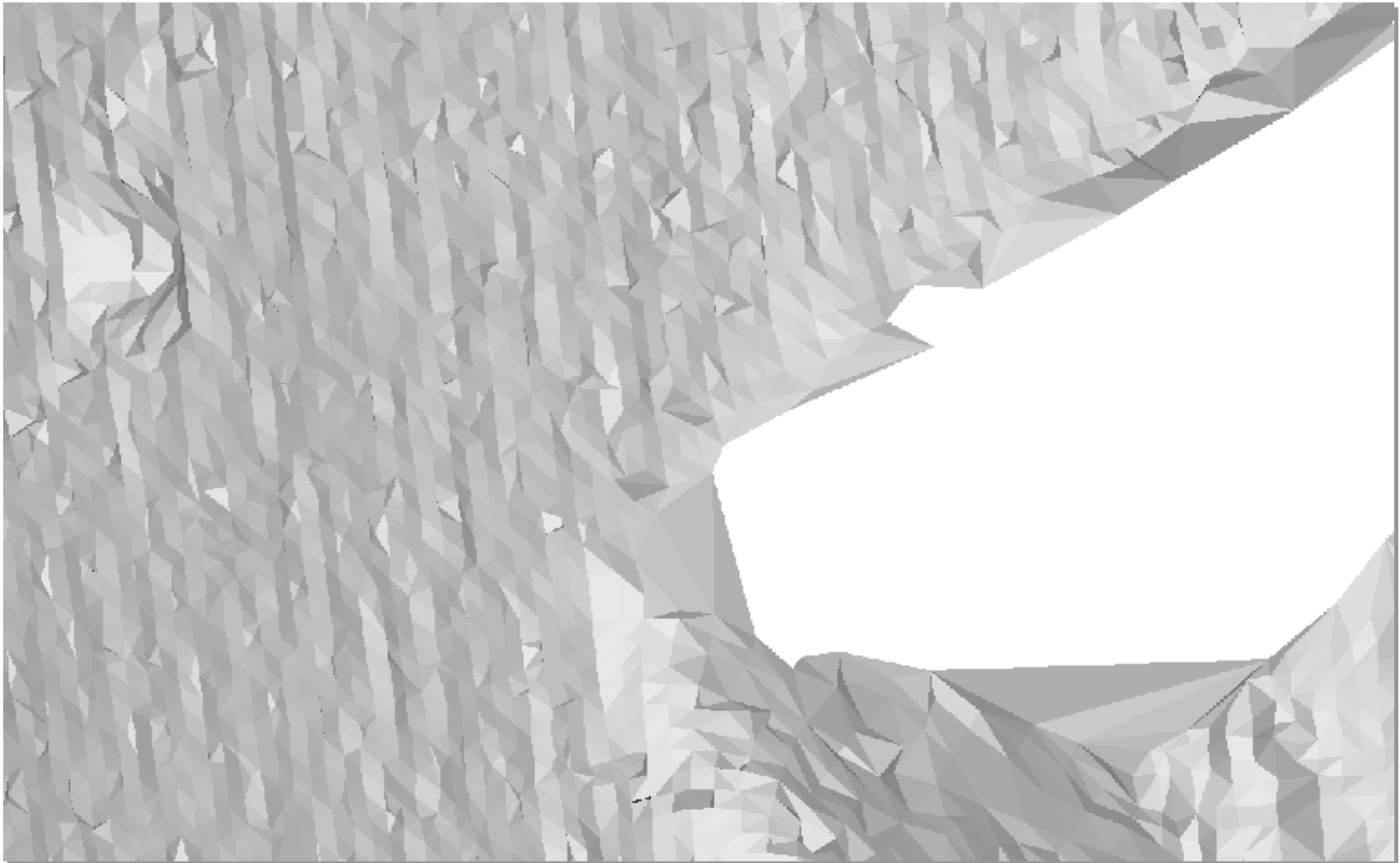
fertige Triangulation, 175



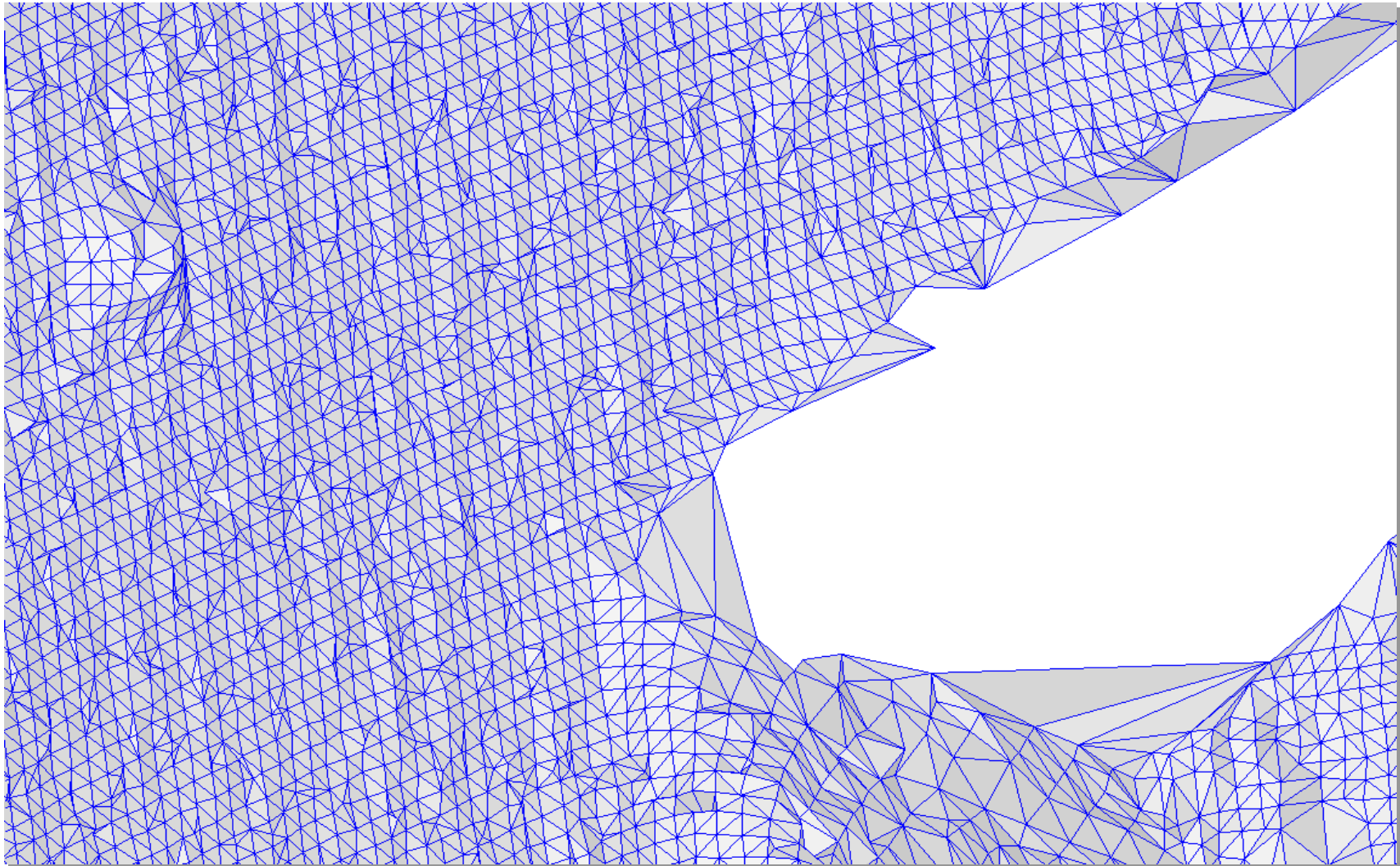
fertige Triangulation, rot markiert: detektierte Ausreißer



Detailansicht, Zoomfaktor 2,5



Detailansicht, Zoomfaktor 10



Detailansicht, Zoomfaktor 10, Drahtgitter eingeblendet

Softwaremodul zur Triangulation von Punktwolken

Input:

- ▶ ungeordnete 3D-Punktwolke

Parameter:

- ▶ Flag für simultane Glättung j/n
- ▶ Schwellwert für maximal zulässigen Winkel bei Dreiecksanschluss
- ▶ Schwellwert für Begrenzung der Länge der Dreieckskanten
- ▶ Flag für Nachbearbeitung der Triangulationsränder (Entfernen spitzer Randdreiecke) j/n

Output:

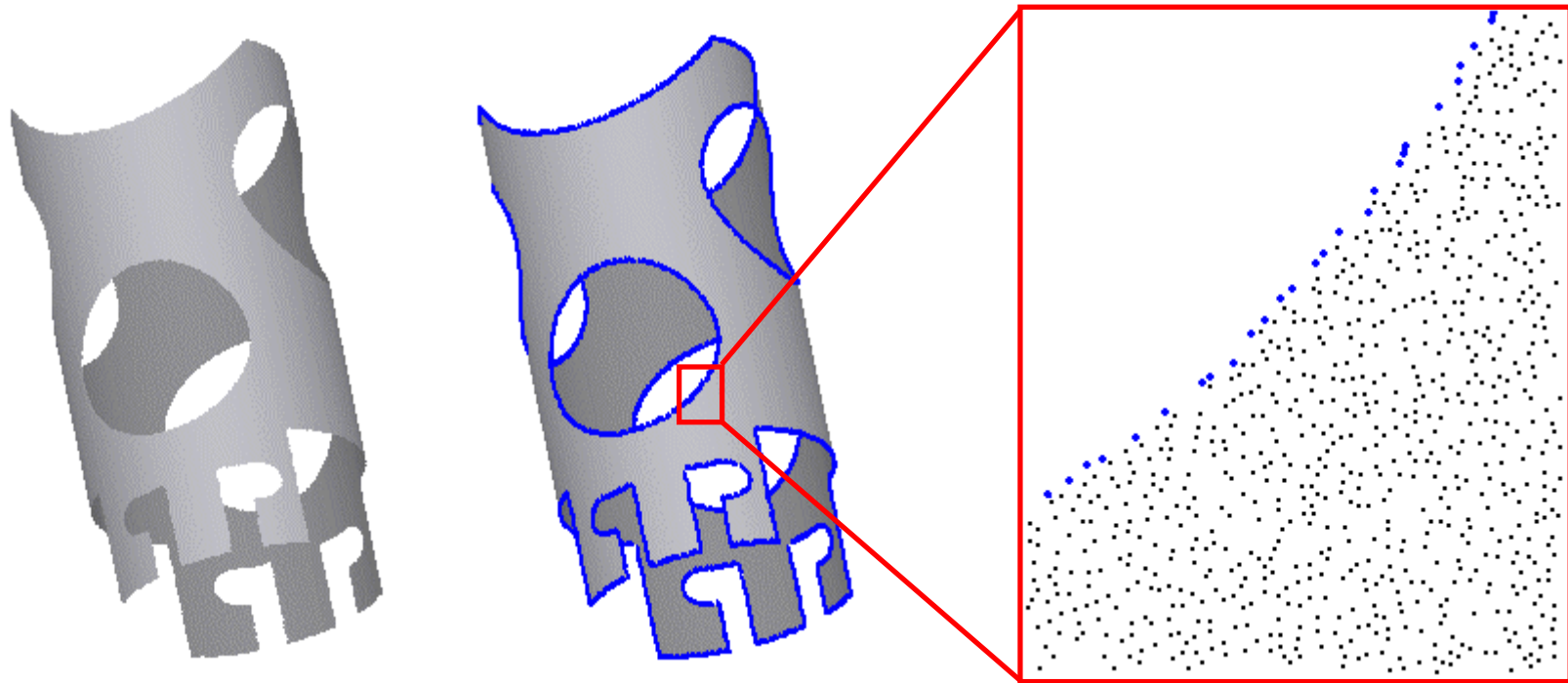
- ▶ Triangulation, Ausreißer

Eigenschaften:

- ▶ automatische Parametrisierung möglich
- ▶ simultane Datenglättung (optional) und Ausreißerdetektion
- ▶ **robustes und qualitativ hochwertiges Verfahren, resistent gegen Ausreißer, Dichteschwankungen und Rauschen**
- ▶ Verarbeitung beliebiger Punktzahlen
- ▶ **Laufzeit: AMD Athlon™ 2700 XP, 250.000 Messpunkte: 75 s**

Randpunktesegmentierung / Aufgabenstellung

- ▶ Randpunkteextraktion zwecks Verschneiden von Formelementen mit Freiformflächen (sog. Trimmen) für die Formelemente: Ebene, Kugel, Kegel und Zylinder, zusätzlich: Identifikation von Innen- und Außenkonturen



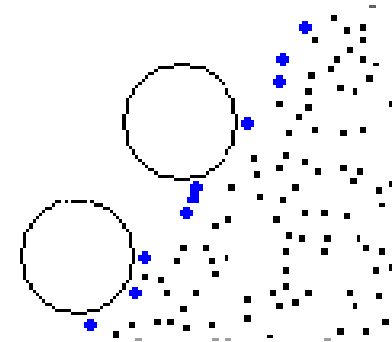
Randpunktesegmentierung / Verfahren

Randbedingung

- ▶ Formelementparameter sind a-priori bekannt

Ansatz

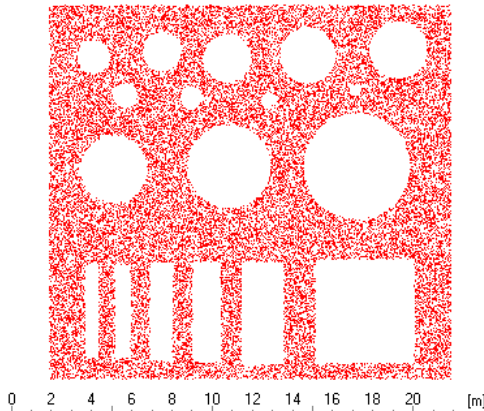
- ▶ Randpunktdefinition: morphologischer Kreis, minimale Randkrümmung in ebenen Punktwolken oder kleinstmögliche Innenkontur
- ▶ Rückführung der Formelemente Kugel, Kegel und Zylinder auf die ebene Problemstellung durch Abwicklung der Punktwolken



Probleme

- ▶ Periodizität der Abwicklung  Arbeiten mit Überlappung
- ▶ Kugelabwicklung ist nicht verzerrungsfrei  sphärisches Abstandsmaß

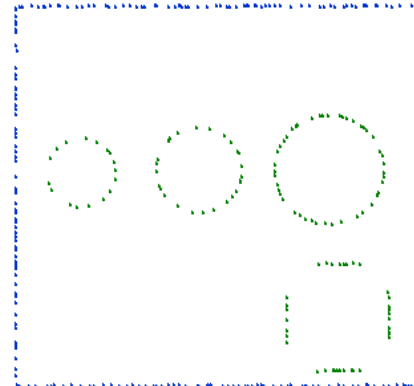
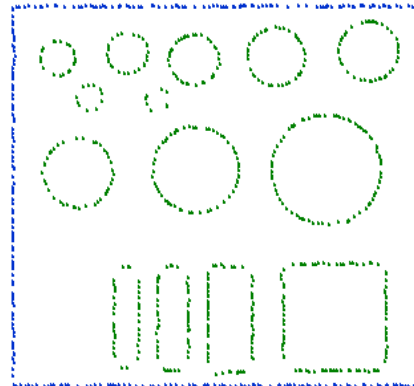
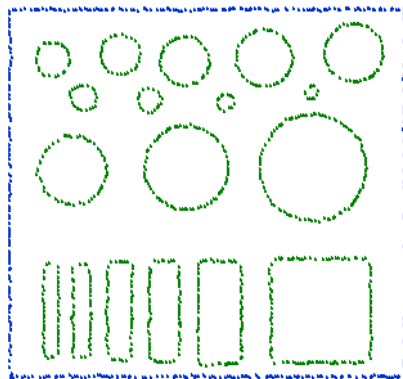
Randpunktesegmentierung / Parametrierung



**Randpunktesegmentierung einer ebenen
Punktwolke mit verschiedenen minimalen
Randkrümmungen**

links: Ausgangspunktwolke

**unten: Randpunkte (minimalen Randkrümmungen v.l.n.r. 0.5, 1,
3, 10, blau: Außenkontur, grün Innenkonturen)**



Softwaremodul zur Randpunktesegmentierung

Implementierung:

- ▶ Sweepalgorithmus mit minimalem Krümmungsradius als halbe Sweepbereichsbreite

Input:

- ▶ ungeordnete 3D-Punktwolke eines Formelementes, Formelementeparameter

Parameter:

- ▶ minimaler Krümmungsradius bzw. minimale Lochgröße

Output:

- ▶ detektierte Randpunkte
- ▶ Index für Zuordnung zur jeweiligen Randkontur
- ▶ Flag für Kennzeichnung Innen- oder Außenkontur

Eigenschaften:

- ▶ automatische Erkennung von Innen- und Außenkonturen
- ▶ automatische Parametrierung über mittleren Punktabstand möglich
- ▶ Verarbeitung beliebiger Punktzahlen
- ▶ Laufzeit: AMD Athlon™ 2700 XP, 150.000 Messpunkte: 6 s

Vermessung von Geometrielementen: Aufgabenstellung

→ Zielstellung

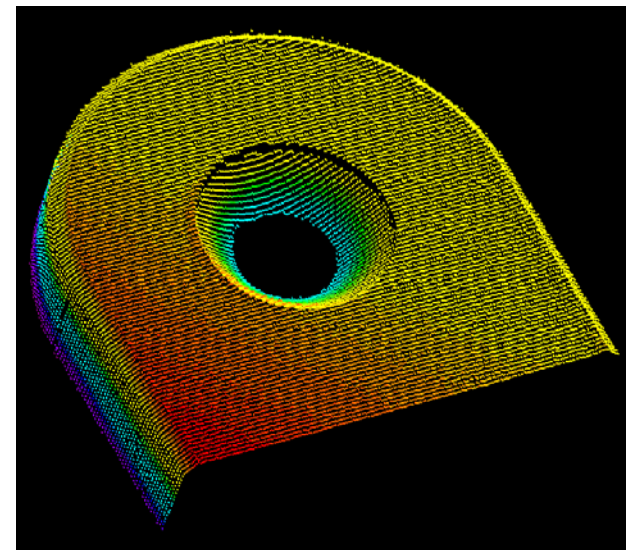
- ▶ Bestimmung der Parameter von Geometrieelementen aus gegebenen Messpunkten
- ▶ praktisch relevante Geometrieelemente: 2D: Gerade, Kreis, Ellipse; 3D: Gerade, Kreis, Ellipse, Ebene, Kugel, Zylinder, Kegel, Torus

→ Anwendungsbereich

- ▶ gesamter industrieller Bereich
(Fertigungsmesstechnik, Prüftechnik, industrielle Messtechnik, Qualitätskontrolle, Reverse Engineering, ...)
- ▶ alle Messbereiche bzw. -volumina (nm bis >>m)

→ Bedeutung der Geometrieelemente resultiert aus

- ▶ funktionale Gründe (Passungen, Führungen, Lager, Normale, ...)
- ▶ einfache und genaue Herstellung (Fertigung)



Profilsystemteil, Geometrieelemente Kreis, Gerade, Ebene, Zylinder und Kegel

Ausgleichsrechnung: Fehlerquadratansatz

→ Aufgabenstellung

- ▶ gegeben sind: K Messpunkte: 2D: $\vec{x}_k = (x_k, y_k)$ oder 3D: $\vec{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$ sowie die Beschreibungsgleichung F des Geometrieelements mit N Parameter a_i
- ▶ Bestimmung der unbekannten Parameter des Geometrieelements

Lösung durch Minimierung der Quadratsumme der senkrechten Abstände der Messpunkte zur betreffenden Kurve bzw. Fläche

→ Ansatz

- ▶ Definition Abstandsfunktion $d_k = F(\vec{a}, \vec{x}_k)$ (senkrechter Abstand)
- ▶ Aufstellung Zielfunktional $Z(a_1 \dots a_N) = \sum_{k=1}^K d_k^2 \rightarrow \text{Minimum}$
- ▶ Ableitung Zielfunktional (partielle Ableitungen), Nullsetzen und Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial Z}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial Z}{\partial a_N} = 0$$

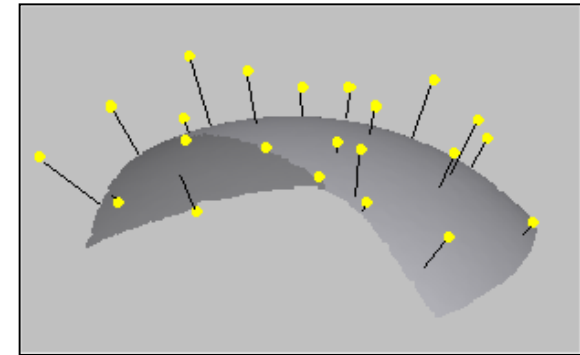
Ausgleichsrechnung: Fehlerquadratansatz

→ andere übliche Bezeichnungen in der Literatur

- ▶ Methode der kleinsten Quadrate
- ▶ Gaußsche Fehlerquadratmethode
- ▶ Approximation im Mittel

→ Variationen der Aufgabenstellung

- ▶ Berechnung aller Parameter eines Geometrieelements (Standardfall)
- ▶ einige Parameter des Geometrieelements sind a-priori bekannt (einzelne Parameter, Form-, Lageparameter)
- ▶ Berücksichtigung externer Nebenbedingungen (Constraints), z.B.
 - ▶ Oberflächenpunkte vorgegeben
 - ▶ Lagerrestriktionen zu anderen Geometrieelementen (z.B. parallel, senkrecht, tangential, coaxial, Punkt auf Achse, ...)



Stand der Normung: ISO 10360-6

ISO 10360-6:2001

Acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM) -
Part 6: Estimation of errors in computing Gaussian associated features

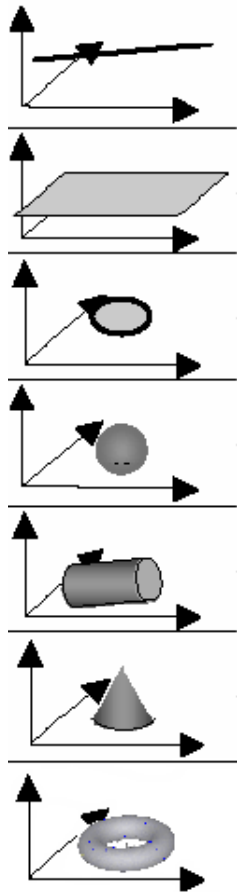
EN ISO 10360-6:2001

Geometrische Produktspezifikation (GPS) - Annahmeprüfung und Bestätigungs-
prüfung für Koordinatenmessgeräte (KMG) - Teil 6: Abweichungsabschätzung beim
Berechnen zugeordneter Geometrieelemente nach Gauß (ISO 10360-6:2001)

Inhalt

- ▶ Begriffe und Definitionen
- ▶ verwandte Normen
- ▶ Anforderungen an Software zur Geometrievermessung
- ▶ Generierung von Referenzdatensätzen (Arten von Referenzdatensätzen, Generieren von Zufallswerten, nominelle Erfassungsbereiche, Addition von Formabweichungen, Stichprobenauswahl)

Parametrierung und Mindestmesspunktanzahl



	Anzahl und Art der freien Parameter		Mindestanzahl Messpunkte
Gerade 2D	2	Normale, Abstand zum Ursprung	2
Gerade 3D	4	Zuführungs-, Richtungsvektor	2
Ebene	3	Normale, Abstand zum Ursprung	3
Kreis 2D	3	Mittelpunkt, Radius	3
Kreis 3D	6	Mittelpunkt, Radius, Achsrichtung	3
Ellipse	5	Mittelpunkt, Länge und Richtung Halbachsen	4
Kugel	4	Mittelpunkt, Radius	4
Zylinder	5	Zuführungs-, Richtungsvektor, Radius	5
Kegel	6	Scheitelpunkt, Richtungsvektor, Öffnungswinkel	6
Torus	7	Mittelpunkt, Achsrichtung, Radien	7

Vereinbarungen für Zuführungs-, Richtungsvektor, Normale:

$$\vec{z} \perp \vec{r} \text{ bzw. } \vec{z} \vec{r} = 0, \quad |\vec{r}| = 1 \text{ bzw. } \vec{r}^T \vec{r} = 1, \quad |\vec{n}| = 1 \text{ bzw. } \vec{n}^T \vec{n} = 1$$

Ausgleichsrechnung: lineares Zielfunktional / inhomogene Form

- **Abstandsfunktion**
$$d_k = \sum_{i=1}^N a_i f_i^{(k)} - f_0^{(k)}$$
- **Zielfunktional**
$$Z(a_1 \dots a_N) = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^N a_i f_i^{(k)} - f_0^{(k)} \right)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$
- **Normalgleichungssystem**

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_N^{(k)} \\ \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_N^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_N^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K f_0^{(k)} f_1^{(k)} \\ \sum_{k=1}^K f_0^{(k)} f_2^{(k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^K f_0^{(k)} f_N^{(k)} \end{pmatrix}$$

- **Lösung von $Ma = b$ z.B. durch Cholesky-Verfahren**
(M ist symmetrisch und positiv definit)

Ausgleichsrechnung: lineares Zielfunktional / homogene Form

→ Abstandsfunktion

$$d_k = \sum_{i=1}^N a_i f_i^{(k)}$$

Vermeidung der trivialen Lösung $a_i = 0$ durch Einführung der Nebenbedingung $\vec{a}^T \vec{a} = 1$
Formulierung durch sog. *Lagrange* - Multiplikator λ

→ Zielfunktional

$$Z(a_1 \dots a_N) = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^N a_i f_i^{(k)} - \lambda (\vec{a}^T \vec{a} - 1) \right)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

→ spezielles Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_N^{(k)} \\ \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_N^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_N^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

→ Lösung von $M a = \lambda a$ z.B. durch Verfahren von Mises (i.A. ist die Ermittlung des zum betragsgrößten oder -kleinsten Eigenwert gehörenden Eigenvektors ausreichend)

Ausgleichsrechnung: nichtlineares Zielfunktional (Gauß-Newton-Verfahren)

- **Abstandsfunktion** $d_k = F(\vec{a}, \vec{x}_k)$
- **Zielfunktional** $Z(a_1, \dots, a_N) = \sum_{k=1}^K \left(F^{(k)}(\vec{a}, \vec{x}_k) \right)^2 \rightarrow \text{Minimum}$
- **Idee: sukzessive Verbesserung einer Startlösung** $\vec{a}^{l+1} = \vec{a}^l + \Delta \vec{a}^l$
 - ▶ Taylor-Reihenentwicklung von F (Abbruch nach 2. Glied) liefert neues Zielfunktional, hier ist \vec{a}^l gegeben (alte Näherung) und der Schrittweitenvektor $\Delta \vec{a}^l$ unbekannt
 - ▶ eine Minimierung des Fehlers für einen Iterationsschritt kann nun durch Lösung der linearen Ausgleichsaufgabe für $\Delta \vec{a}^l$ erfolgen
- **Normalgleichungssystem** ($F'(\vec{a})$ ist Jakobimatrix, Größe $K \times N$)

$$F'(\vec{a})^T F'(\vec{a}) \Delta \vec{a}^l = F'(\vec{a})^T F(\vec{a}) \quad \text{bzw.} \quad F'(\vec{a}) \Delta \vec{a} = F(\vec{a})$$
- Lösung z.B. durch **Cholesky-Verfahren** bzw. **QR-Zerlegung**

Ausgleichsrechnung: nichtlineares Zielfunktional / praktische Aspekte

→ Numerik:

QR-Zerlegung (Lösung überbestimmtes Gleichungssystem) ist numerisch stabiler, verwendet wird i.a. die Housholder-Transformation

→ Bestimmung der Jakobimatrix:

zur Vermeidung der analytischen Ableitung der Zielfunktion kann mit einer Approximation durch Differenzenquotienten gearbeitet werden

→ Konvergenz:

- ▶ für eine globale Konvergenz sind ausreichend genaue Startwerte erforderlich
- ▶ wegen der unvollständigen Reihenentwicklung ist $\Delta \vec{a}^l$ ungenau, üblich sind Modifikationen des Gauß-Newton-Verfahrens:
 - ▶ Dämpfungsverfahren: $\Delta \vec{a}^l$ wird anhand von Konvergenztests skaliert
 - ▶ Levenberg-Marquardt-Verfahren: Mischung aus Gradientenabstiegsverfahren (\vec{a}^l weit entfernt von \vec{a}^l_{\min}) und Gauß-Newton-Verfahren (in Minimumnähe)

Ausgleichsrechnung: nichtlineares Zielfunktional / praktische Aspekte

→ Gewichtung der Messwerte

- ▶ in der Praxis können zu den Messpunkten Qualitätswerte gegeben sein
- ▶ eine Berücksichtigung der Qualitätswerte erfolgt als Gewichtung des Fittingfehlers pro Messpunkt

→ Abbruchkriterien

- ▶ absoluter Fehler RMS (root mean square):
$$Error_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum (w_k d_k^2)}{\sum w_k}}$$
- ▶ relativer Fehler (RMS-Änderung bezogen auf Gesamtfehler):

$$Error_{relativ} = \frac{RMS_l - RMS_{l+1}}{RMS_{l+1}}$$

- ▶ maximal zulässige Anzahl von Iterationsschritten

Softwarebibliothek: Ansätze nach Art des Zielfunktionalis

Verfahrensgruppe	Ausgleich aller Parameter	Ausgleich mit fixen Parametern	Formelementpunkte vorgegeben
Formelement			
2D-Gerade	linear	linear	linear
2D-Kreis	nichtlinear (lineare Näherung)	abhängig von konkreter Parameterkombination	nichtlinear
Ellipse	nichtlinear (lineare Näherung)	nichtlinear	-
3D-Gerade	linear	abhängig von konkreter Parameterkombination	linear
3D-Kreis	nichtlinear	abhängig von konkreter Parameterkombination	nichtlinear
Ebene	linear	linear	linear
Kugel	nichtlinear (lineare Näherung)	abhängig von konkreter Parameterkombination	nichtlinear
Zylinder	nichtlinear	abhängig von konkreter Parameterkombination	abhängig von konkreter Parameterkombination
Kegel	nichtlinear	abhängig von konkreter Parameterkombination	abhängig von konkreter Parameterkombination
Torus	nichtlinear	abhängig von konkreter Parameterkombination	-

mathematische Ansätze nach Verfahrensgruppe und Art des Geometrieelements

lineares Zielfunktional, inhomogene Form, Beispiel

Kreisapproximation durch lineare Näherungsfunktion

→ Kreisgleichung

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$$

→ Umformung

$$-2xm_x - 2ym_y + m_x^2 + m_y^2 - r^2 + x^2 + y^2 = 0$$

→ Substitution

$$a_1 = -2m_x, a_2 = -2m_y, a_3 = m_x^2 + m_y^2 - r^2,$$

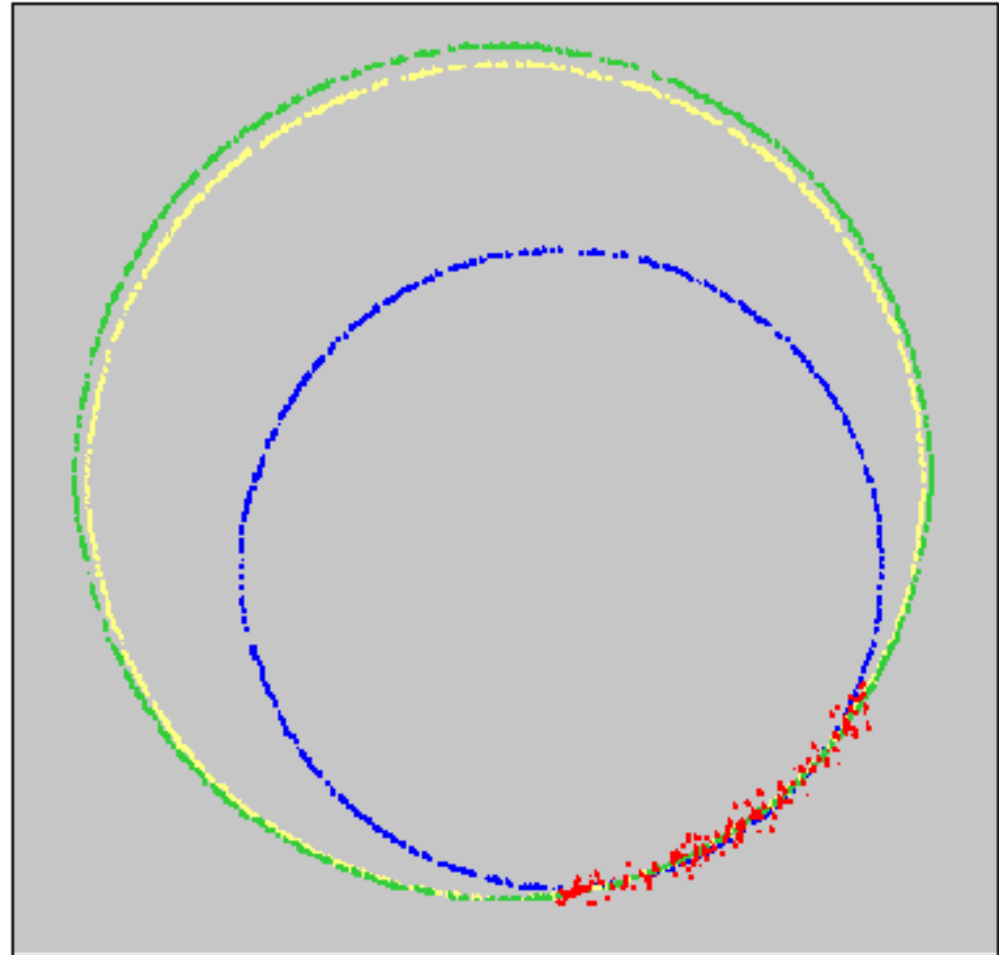
$$f_1^{(k)} = x_k, f_2^{(k)} = y_k, f_3^{(k)} = 1, f_0^{(k)} = -(x_k^2 + y_k^2)$$

→ Normalgleichungssystem

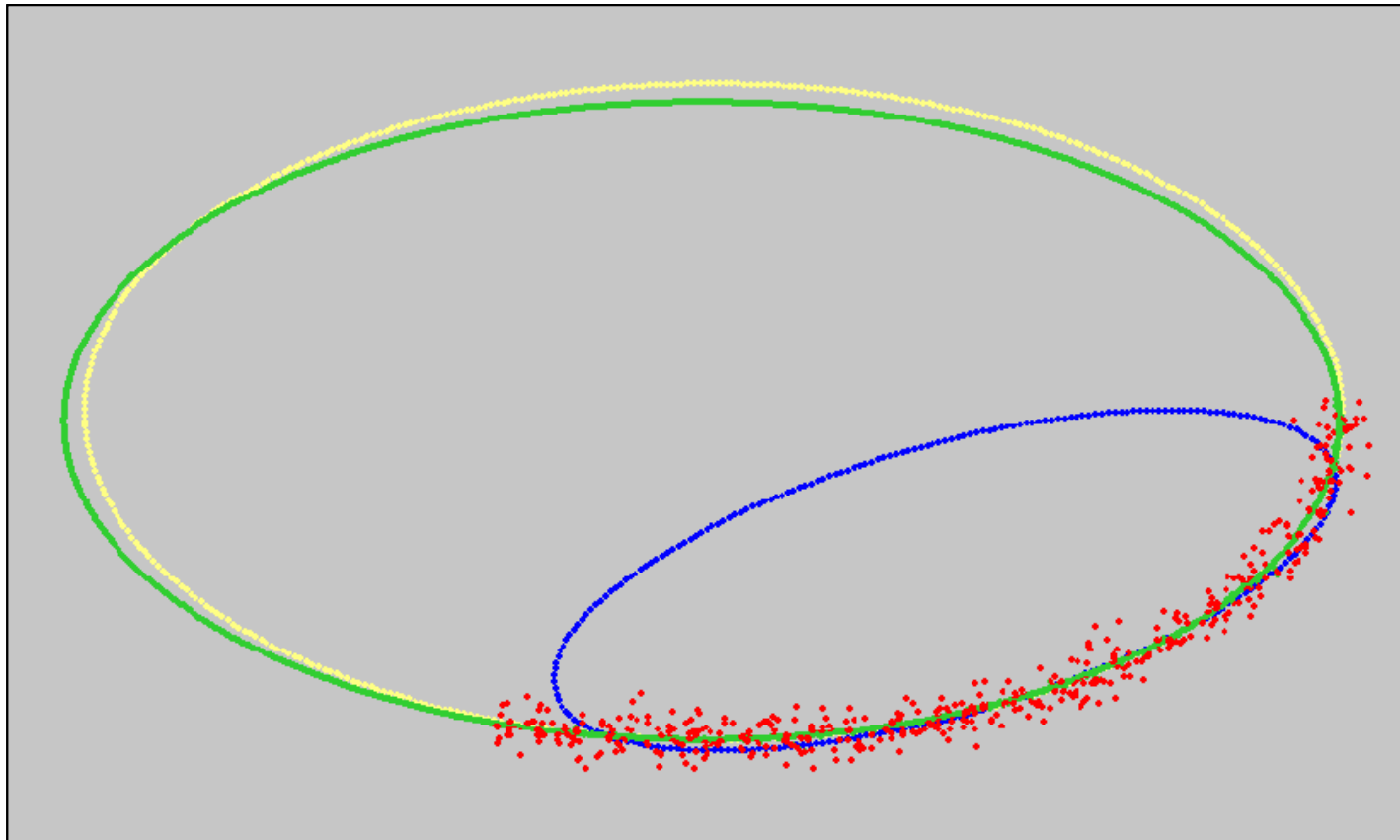
$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K x_k^2 & \sum_{k=1}^K x_k y_k & \sum_{k=1}^K x_k \\ \sum_{k=1}^K x_k y_k & \sum_{k=1}^K y_k^2 & \sum_{k=1}^K y_k \\ \sum_{k=1}^K x_k & \sum_{k=1}^K y_k & \sum_{k=1}^K 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2m_x \\ -2m_y \\ (m_x^2 + m_y^2 - r^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{k=1}^K ((x_k^2 + y_k^2)x_k) \\ -\sum_{k=1}^K ((x_k^2 + y_k^2)y_k) \\ -\sum_{k=1}^K (x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix}$$

Kreisapproximation, geometrische und algebraische Lösung

- rot / grün: verrauschte Punkte (Stützstellen) und Sollkreis eines Kreissegments
- blau: algebraische Lösung, Näherungslösung
- gelb: geometrische Lösung, Fehlerquadratapproximation des senkrechten Abstands



Ellipsenapproximation, geometrische und algebraische Lösung



rot:/ grün: **verrauschte Punkte (Stützstellen) und Sollellipse eines Ellipsensegments**
blau: **algebraische Lösung, Näherungslösung**
gelb: **geometrische Lösung, Fehlerquadratapproximation des senkrechten Abstands**

lineares Zielfunktional, homogene Form, Beispiel

2D-Geradenapproximation

→ **Geradengleichung** $n_x x + n_y y + d = 0$ (hier: nichtnormierte Parameter)

→ **Ansatz** $a_1 = n_x, a_2 = n_y, a_3 = d$ und $f_1^{(k)} = x_k, f_2^{(k)} = y_k, f_3^{(k)} = 1$

→ **Normalgleichungssystem**

$$\frac{1}{K} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K x_k^2 & \sum_{k=1}^K x_k y_k & \sum_{k=1}^K x_k \\ \sum_{k=1}^K x_k y_k & \sum_{k=1}^K y_k^2 & \sum_{k=1}^K y_k \\ \sum_{k=1}^K x_k & \sum_{k=1}^K y_k & \sum_{k=1}^K 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ d \end{pmatrix}$$

→ gesucht wird der zum größten Eigenwert gehörende Eigenvektor, da genau

dann die Zielfunktion $\sum_{k=1}^K \left(n_x x_k + n_y y_k + d - \lambda (n_x^2 + n_y^2 + d^2 - 1) \right)^2$ minimal wird

nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Zylinderfitting

→ **Abstandsfunktion** $d_k = \left| \vec{r} \times (\vec{x}_k - \vec{z}) \right| - rad$ (Achsabstand abzüglich Radius)

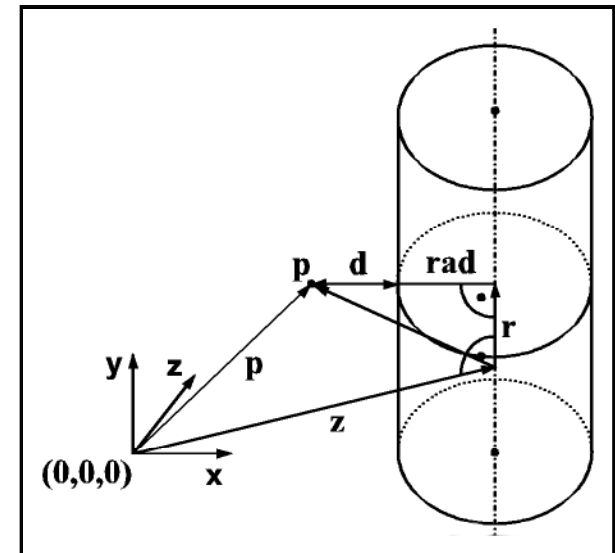
→ **Zielfunktion** $Z = \sum_{k=1}^K \left(\left| \vec{r} \times (\vec{x}_k - \vec{z}) \right| - rad \right)^2$

→ **Ableitungen**
(mit $g_k = \vec{r} \cdot (\vec{x}_k - \vec{z})$ und $f_k = \left| \vec{r} \times (\vec{x}_k - \vec{z}) \right|$)

$$\frac{\partial d_k}{\partial z_x} = \frac{r_x g_k - (x_{xk} - z_x)}{f_k} \quad \frac{\partial d_k}{\partial r_x} = \frac{g_k [r_x g_k - (x_{xk} - z_x)]}{f_k}$$

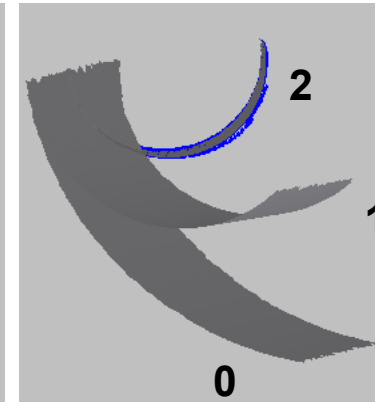
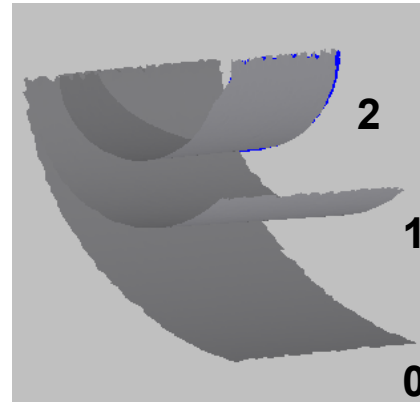
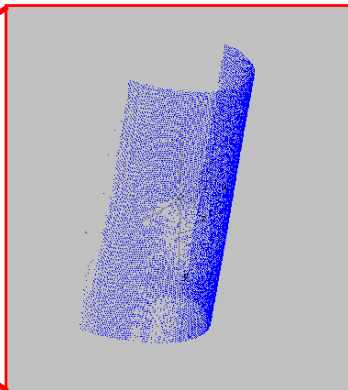
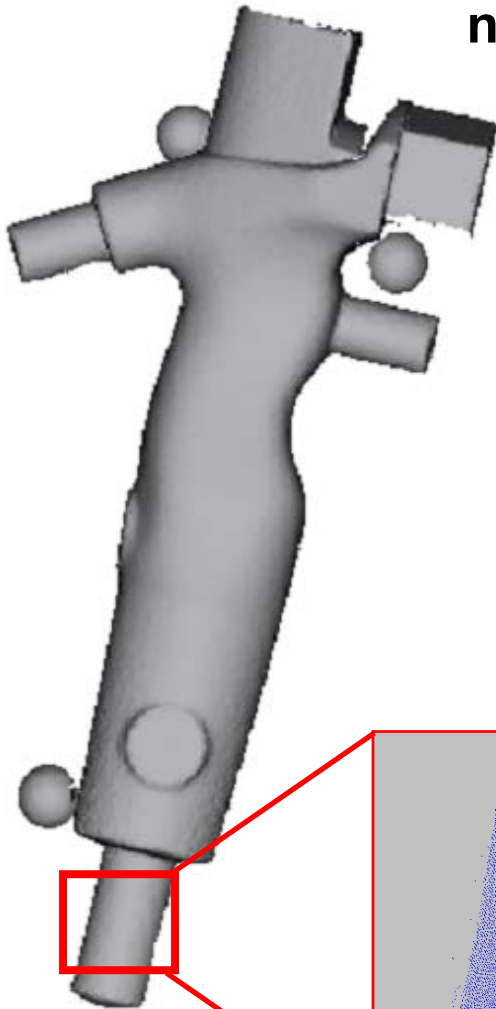
$$\frac{\partial d_k}{\partial z_y} = \frac{r_y g_k - (x_{yk} - z_y)}{f_k} \quad \frac{\partial d_k}{\partial r_y} = \frac{g_k [r_y g_k - (x_{yk} - z_y)]}{f_k}$$

$$\frac{\partial d_k}{\partial z_z} = \frac{r_z g_k - (x_{zk} - z_z)}{f_k} \quad \frac{\partial d_k}{\partial r_z} = \frac{g_k [r_z g_k - (x_{zk} - z_z)]}{f_k} \quad \frac{\partial d_k}{\partial rad} = -1$$



nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Zylinderfitting

Vermessung des Anschlußstutzens eines Spritzgußteils

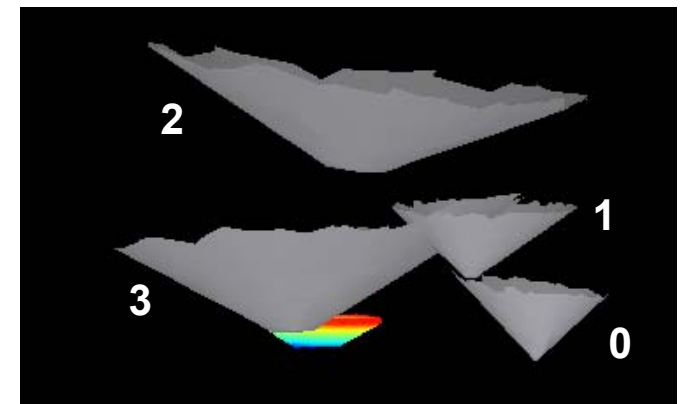
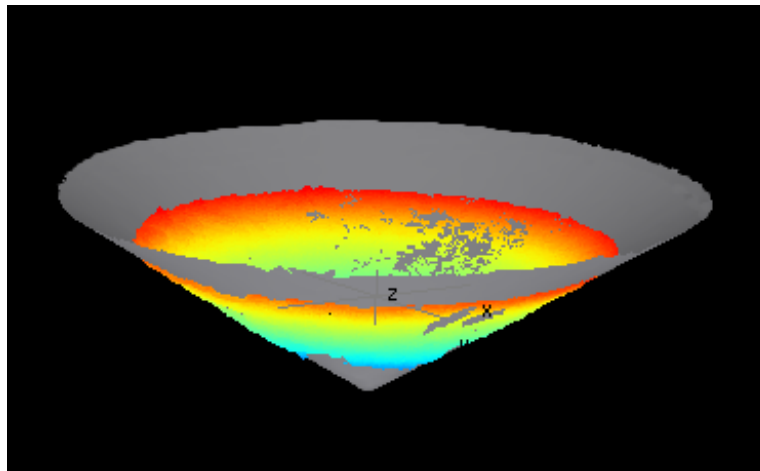
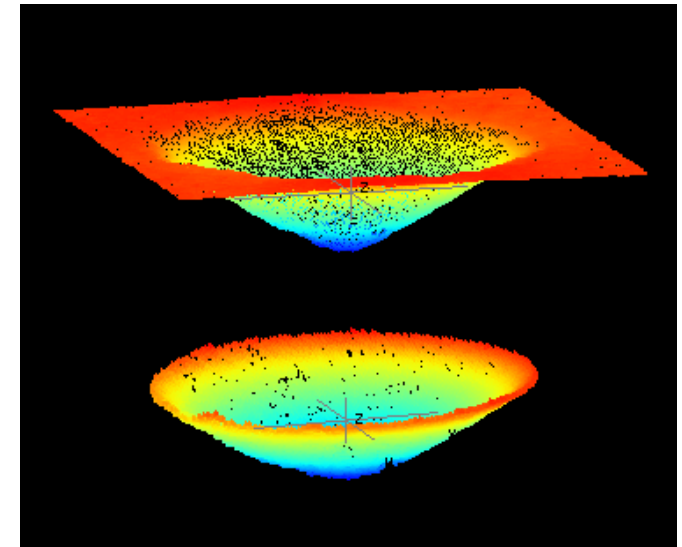


Iteration	RMS	dRMS _{relativ}
0	10.5793	-
1	6.40806	0.394284
2	1.64117	0.743889
3	0.0850883	0.948154
4	0.029304	0.655605
5	0.029304	0.655605
6	0.0292892	0.000504453
7	0.0292892	1.63323e-10
8	0.0292892	1.23568e-15
9	0.0292892	2.33034e-16

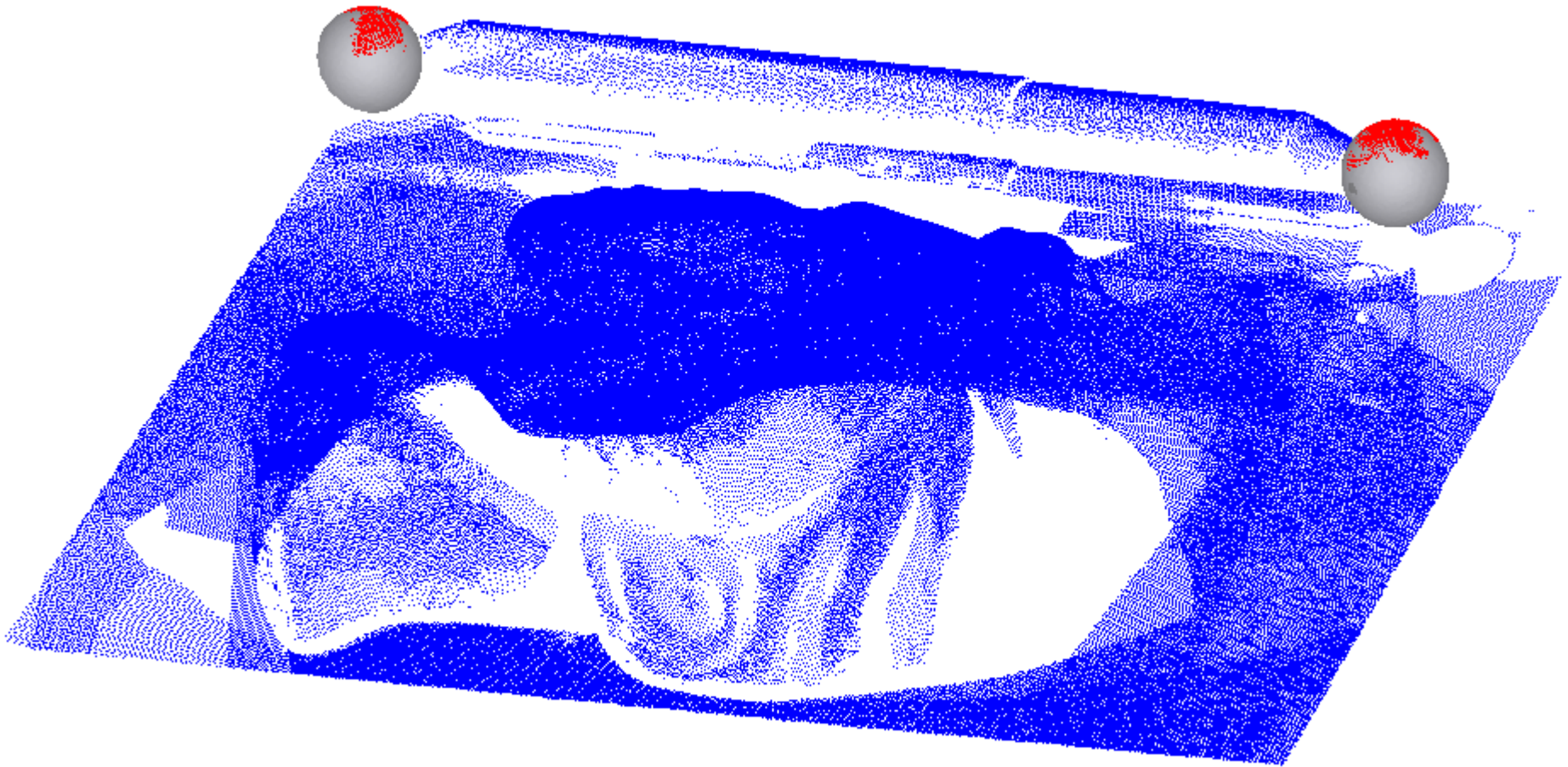
nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Kegelfitting

Härteprüfung nach Rockwell (DIN 50103)

Iteration	RMS	dRMS _{relativ}	φ
0	0.669		90.0°
1	0.654	0.0227	101.4°
2	0.645	0.0137	126.2°
3	0.072	0.8883	119.9°
4	0.013	0.8139	122.3°
5	0.00299126	0.7769	117.89°
6	0.00262962	0.1209	117.5039°
7	0.00262932	0.000111	117.497485°
8	0.00262932	1.10316e-06	117.497662°

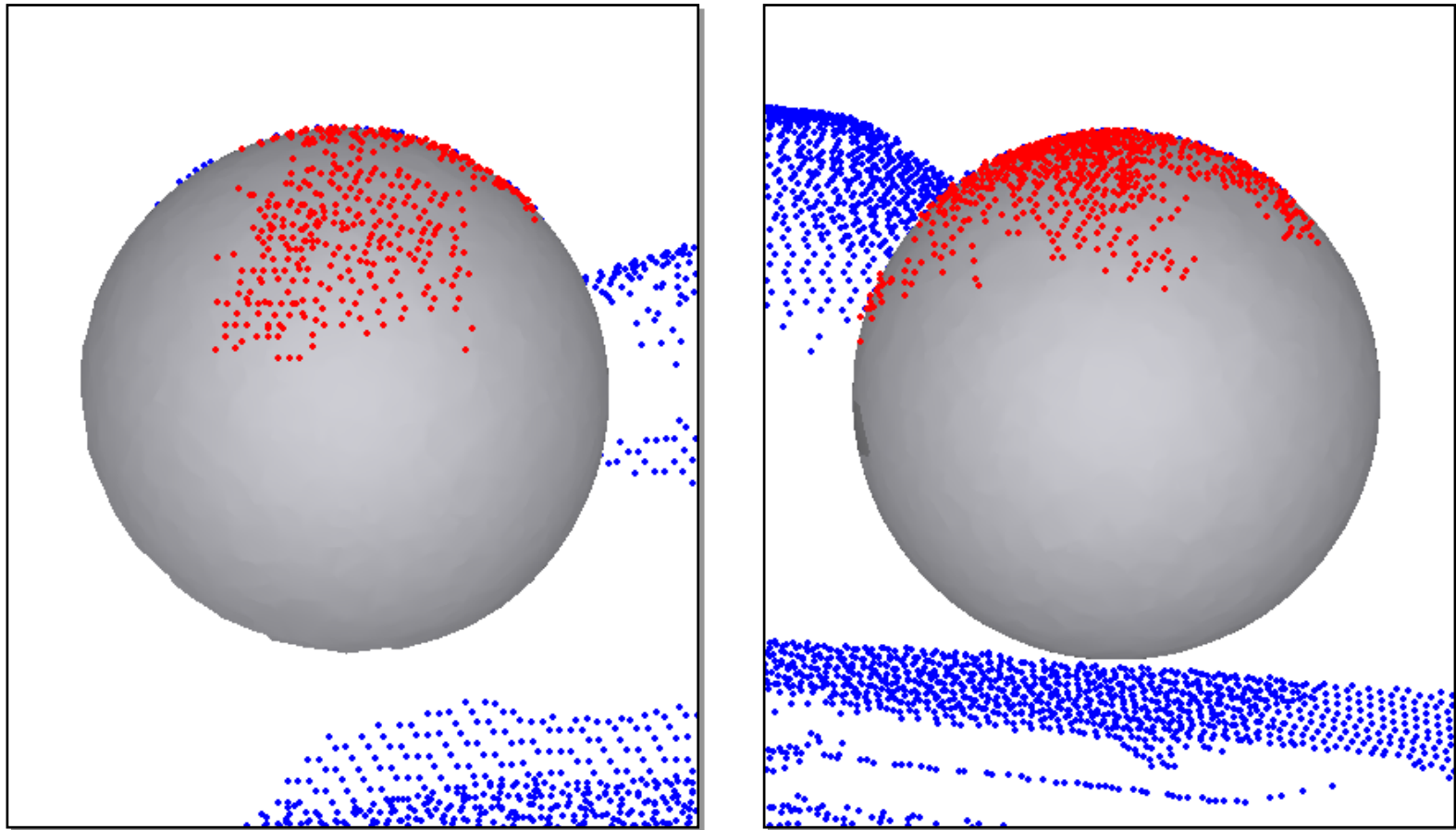


nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Kugelfitting



Rohpunkt wolke, Kugelmessung auf Kalibrierkörper

nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Kugelfitting



Kugelmessung, Detailansichten

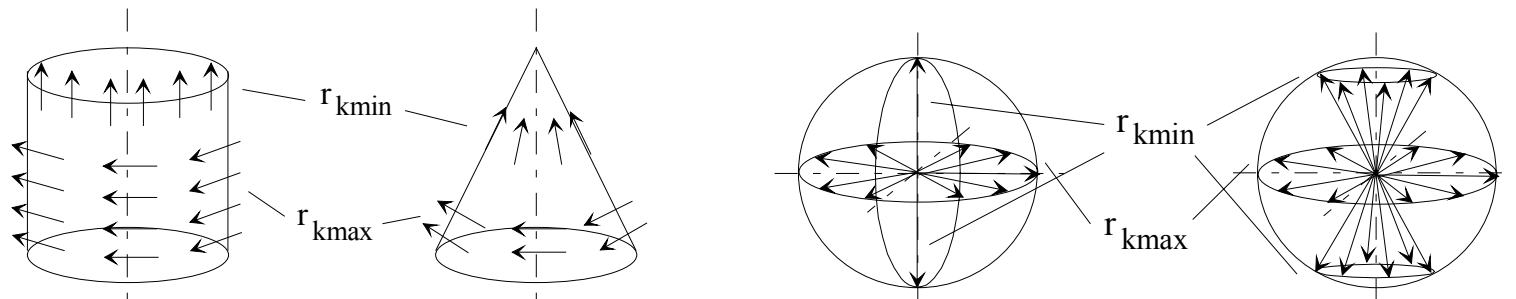
Bereitstellung von Startwerten

- ▶ **manuelle Vorgabe: Nutzung von a-priori-Wissen über Messsituation und Messobjekt**
- ▶ **lineare Näherungsverfahren für Kreis, Kugel und Ellipse**
- ▶ **generische Generierung (zufällige Auswahl von Startparametern und repräsentativen Teilpunktmengen, Parameterberechnung für jede Teilpunktmenge, Startwert wird der Parametersatz mit dem kleinsten Fehler)**
- ▶ **Auswertung der Messpunktstatistik**
 - ▶ **Vollkreis, -ellipse, -kugel, -torus: Mittelpunkt der Formelemente aus Schwerpunkt, Radien durch Auswertung der Relation einzelner Messpunkte zum Zentrum**
 - ▶ **Formelemente mit ausgeprägter Verteilung der Messpunkte in eine Richtung: Achslage aus Parametern der Hauptachsentransformation**
- ▶ **Berechnung von Parametern anhand einer minimalen Messpunktanzahl**
- ▶ **Zylinder, Kegel, Torus: Reduktion auf 2D-Formelemente durch Projektion von räumlichen Schnittmengen, Selektion anhand Approximationsfehler, Kombination der Parameter der 2D-Formelemente**

Bereitstellung von Startwerten

- ▶ Kugel, Zylinder, Kegel, Torus: Berechnung der Hauptkrümmungsrichtungen von lokalen Teilpunktmengen, Ableitung der Parameter aus der resultierenden Gaußkugel

Hauptkrümmungen k_{\max} , k_{\min} , Hauptkrümmungsrichtungen $\mathbf{r}_{k\max}$, $\mathbf{r}_{k\min}$ am Beispiel von Kegel und Zylinder:



Formelement	Form auf Gaußkugel	k_{\min}	$\mathbf{r}_{k\max}$ (\perp zu $\mathbf{r}_{k\min}$)
Kreiszylinder $\underline{\mathbf{h}}, \underline{\mathbf{a}}, \mathbf{r}$	1 Kreissegment, $\text{rad}=1$ bzw. 2 Einzelpunkte	0	\vec{a}
Kreiskegel $\underline{\mathbf{m}}, \underline{\mathbf{a}}, \Phi$	3 Kreissegmente, $\text{rad}_{\max}=1, \text{rad}_{\min}<1$	0	$\vec{p} - \vec{m}$

Softwaremodul zur Vermessung von Geometrieelementen

Input:

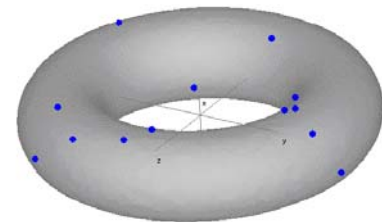
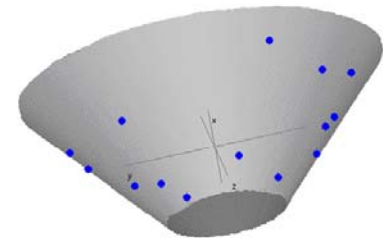
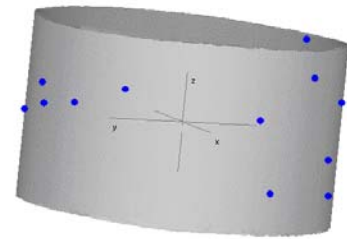
- ▶ ungeordnete 3D-Punktwolke
- ▶ Qualitätswert pro Messpunkt (optional)
- ▶ Angabe des Geometrieelementetyps

Parameter:

- ▶ nichtlineare Ansätze:
 - ▶ Startwerte für Formelementparameter
 - ▶ Abbruchkriterien: minimaler RMS, minimale Änderung des RMS, zulässige Iterationsanzahl

Output:

- ▶ Geometrieelementparameter



Adaptive Ausgleichsrechnung

→ Problem

- ▶ Punktwolken (insbesondere optisch antastende Messverfahren) enthalten Ausreißer
 - ▶ Fittingverfahren setzen eine korrekte Segmentierung der zum betreffenden Geometrieelement gehörenden Messpunkte voraus
- interaktive und manuelle Ausreißerdetektion bzw. Segmentierung der Messpunkte durch den Anwender ist zeitaufwendig und subjektiv
- notwendig ist zumindest eine teilautomatische Detektion der Regelgeometriepunkte

→ Lösung

- ▶ iteratives Verfahren der adaptiven Ausgleichsrechnung, gekennzeichnet durch Gewichtung der einzelnen Messpunkte je nach Zugehörigkeit zum Geometrieelement
- ▶ Voraussetzung ist Grobsegmentierung

Adaptive Ausgleichsrechnung

→ **Ansatz:** Einführung von Gewichten w_k pro Messpunkt, diese geben die Zugehörigkeit zum Geometrieelement an

→ **Zielfunktion** $\sum_{k=1}^K d_k^2 \rightarrow \text{Minimum}$ mit $d_k^2 = Z(\vec{a}, \vec{x}_k) \cdot w_k$

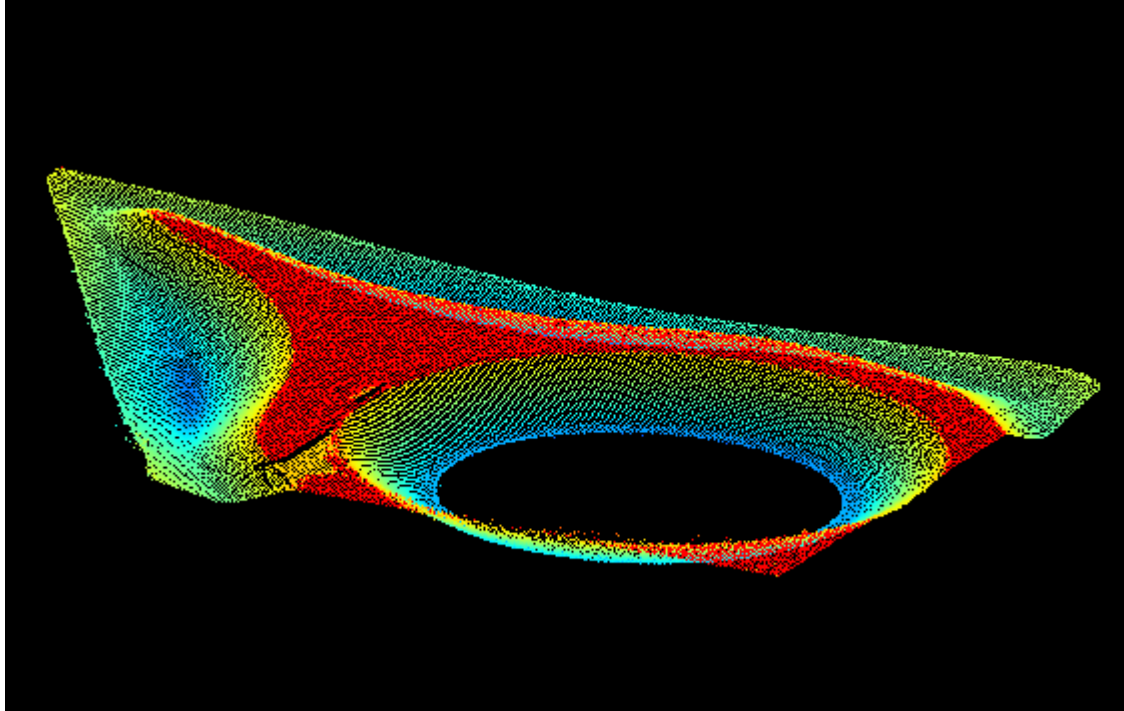
→ nach dem Gesetz der Großen Zahlen wird angenommen, daß die Defekte normalverteilt sind, Einführung der Dichtefunktion φ

$$\varphi(d_k, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_k^2 - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_k^2 \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (d_k^2 - \mu)^2}$$

→ **Gewichtsberechnung** $w_k = \varphi(d_k, \mu, \sigma) / \sum \varphi_k$ mit $\sum \varphi_k = \sum_{k=1}^K \varphi(d_k, \mu, \sigma)$

→ **Abbruchkriterien** analog nichtlineare Iterationsverfahren, zusätzlich Mindestpunktanzahl $n_{p_{\min}}$

Adaptive Ausgleichsrechnung

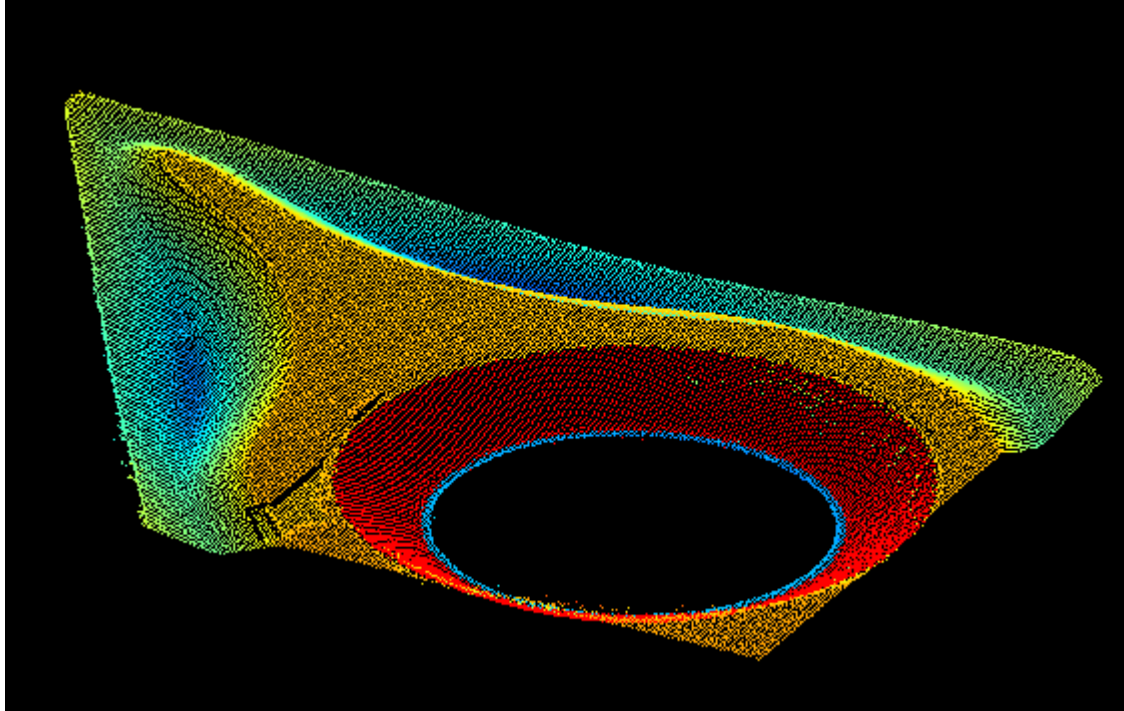


Ebenensegmentierung, Beispiel Wendeschneidplatte

rot: segmentierte Punkte

Zielzustand nach 12 Iterationen

Adaptive Ausgleichsrechnung



Kugelsegmentierung, Beispiel Wendeschneidplatte
rot: segmentierte Punkte
Zielzustand nach 8 Iterationen

Softwaremodul zur Feinsegmentierung von Geometrieelementen

Input:

- ▶ ungeordnete 3D-Punktwolke
- ▶ Qualitätswert pro Messpunkt (optional)
- ▶ Angabe des Geometrieelementetyps

Parameter:

- ▶ nichtlineare Ansätze:
 - ▶ Startwerte für Formelementparameter
 - ▶ Abbruchkriterien: minimaler RMS, minimale Änderung des RMS, zulässige Iterationsanzahl, Zielpunktzahl

Output:

- ▶ Geometrieelementeparameter
- ▶ Segmentierungswert pro Messpunkt (Maß für Zugehörigkeit zum Geometrieelement)

Softwarebibliothek: Implementationsstand (1/1)

Verfahrensgruppe	Ausgleich aller Parameter	Ausgleich mit fixen Parametern	Formelementpunkte vorgegeben	Feinsegmentierung
Formelement				
2D-Gerade	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
2D-Kreis	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
Ellipse	vorhanden	vorhanden	nicht vorhanden	vorhanden
2D-Quadrik	vorhanden			vorhanden
3D-Gerade	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
3D-Kreis	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
Ebene	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
Kugel	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
Zylinder	vorhanden	vorhanden	teilweise vorhanden	vorhanden
Kegel	vorhanden	vorhanden	teilweise vorhanden	vorhanden
Torus	vorhanden	vorhanden	nicht vorhanden	vorhanden
3D-Quadrik	vorhanden			vorhanden

verfügbare Verfahren nach Verfahrensgruppe und Art des Geometrieelements

Softwarebibliothek: Implementationsstand (1/2)

	Restriktion (konstante Parameter oder vorgegebene Form- elementpunkte)	Zielfunktional
2D-Gerade	Normalenvektor	linear
	Abstand zum Koordinatenursprung	nichtlinear
	ein Kurvenpunkt	linear
2D-Kreis	Radius	nichtlinear
	Mittelpunkt	linear
	ein und zwei Kurvenpunkte	nichtlinear
Ellipse	Halbachsen	nichtlinear
	Mittelpunkt	nichtlinear
	Richtungsvektor große Halbachse	nichtlinear
	Richtungsvektor große Halbachse und Radius	nichtlinear
	ein – vier Kurvenpunkte	nicht implementiert
3D-Kreis	Radius	nicht implementiert
	Mittelpunkt	nicht implementiert
	Richtungsvektor der Kreisebene	nicht implementiert
	Radius und Richtungsvektor	nicht implementiert
	Radius und Mittelpunkt	nicht implementiert
	ein und zwei Kurvenpunkte	nicht implementiert

verfügbare Verfahren nach Verfahrensgruppe und Art des Geometrieelements

Softwarebibliothek: Implementationsstand (1/3)

	Restriktion (konstante Parameter oder vorgegebene Form- elementpunkte)	Zielfunktional
3D-Gerade	Richtungsvektor	linear
	Abstand zum Koordinatenursprung	nicht implementiert
	ein Kurvenpunkt	linear
Ebene	Normalenvektor	linear
	Abstand zum Koordinatenursprung	linear
	ein und zwei Oberflächenpunkte	linear
Kugel	Radius	nichtlinear
	Mittelpunkt	linear
	ein – drei Oberflächenpunkte	nichtlinear
Zylinder	Radius	nichtlinear
	Richtungsvektor der Achse	nichtlinear, lineare Näherungslösung
	Radius und Richtungsvektor	nichtlinear, lineare Näherungslösung
	Zylinderachse	linear
	ein Achspunkt	nichtlinear
	ein Oberflächenpunkt	nichtlinear
	zwei – fünf Oberflächenpunkte	nicht implementiert

Softwarebibliothek: Implementationsstand (1/4)

	Restriktion (konstante Parameter oder vorgegebene Form- elementpunkte)	Zielfunktional
Kegel	Öffnungswinkel	nichtlinear
	Kegelspitze	nichtlinear
	Richtungsvektor der Achse	nichtlinear
	Richtungsvektor der Achse und Öffnungswinkel	nichtlinear
	Richtungsvektor der Achse und Kegelspitze	linear
	Richtungsvektor der Achse und Achspunkt	linear
	ein Achspunkt	nichtlinear
	ein Oberflächenpunkt	nichtlinear
	ein – sechs Oberflächenpunkte	nicht implementiert
Torus	Radien	nichtlinear
	Mittelpunkt	nichtlinear
	Richtungsvektor der Achse	nichtlinear
	Radien und Richtungsvektor	nichtlinear
	Torusachse	nichtlinear
	Richtungsvektor der Achse und Achspunkt	nichtlinear
	ein – sieben Oberflächenpunkte	nicht implementiert

verfügbare Verfahren nach Verfahrensgruppe und Art des Geometrieelements

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.