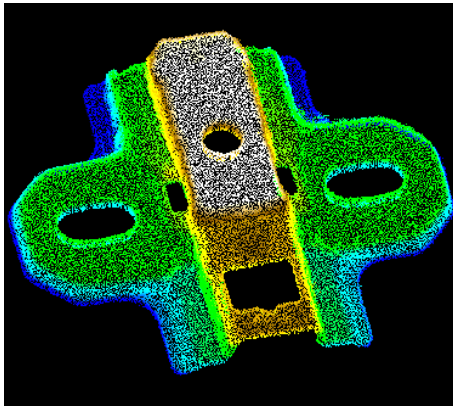


aib - Automation durch integrierte Bildverarbeitung
- Workshop 3 -



Softwarebibliothek zum Fitting von Regelgeometrien – Minimierung der Quadratsumme der senkrechten Abstände von Messpunkten zu Kurven und Flächen

Dipl.-Ing. Frank Gaßmann

Zentrum für Bild- und Signalverarbeitung (ZBS) e. V.

Kontakt:	ZBS e.V., G-Kirchhoff-Str. 5, 98693 Ilmenau
Email:	frank.gassmann@zbs-ilmenau.de
URL:	http://www.zbs-ilmenau.de
Tel.:	+49 3677 2010304
Fax:	+49 3677 2010302

- **Überblick**
 - Aufgabenstellung und Einordnung
 - Datenbasis und Anwendungsgebiete
- **Grundlagen der Ausgleichsrechnung**
 - Methode der kleinsten Fehlerquadrate
 - lineare und nichtlineare Ansätze
 - exemplarische Aufstellung von Abstands- und Zielfunktionen
- **Softwarebibliothek**
 - Beispielmessungen
 - Aspekte der praktischen Arbeit
 - Implementierungsstand

Aufgabenstellung (1/2)

→ Zielstellung

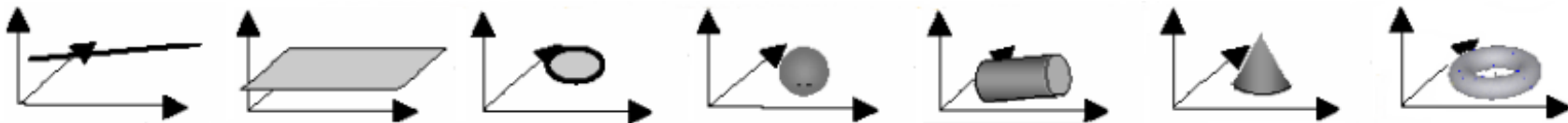
- ▶ Bestimmung der Parameter von Geometrieelementen aus vorgegebenen Messpunkten

→ praktisch relevante Geometrieelemente

- ▶ 2D: Gerade, Kreis, Ellipse
- ▶ 3D: Gerade, Kreis, Ellipse, Ebene, Kugel, Zylinder, Kegel, Torus

→ Eigenschaften

- ▶ analytisch (einfach) beschreibbar (Kurven und Flächen 1. und 2. Ordnung, Rotationskörper, Basis der 3D-Elemente sind 2D-Geometrieelemente)



Aufgabenstellung (2/2)

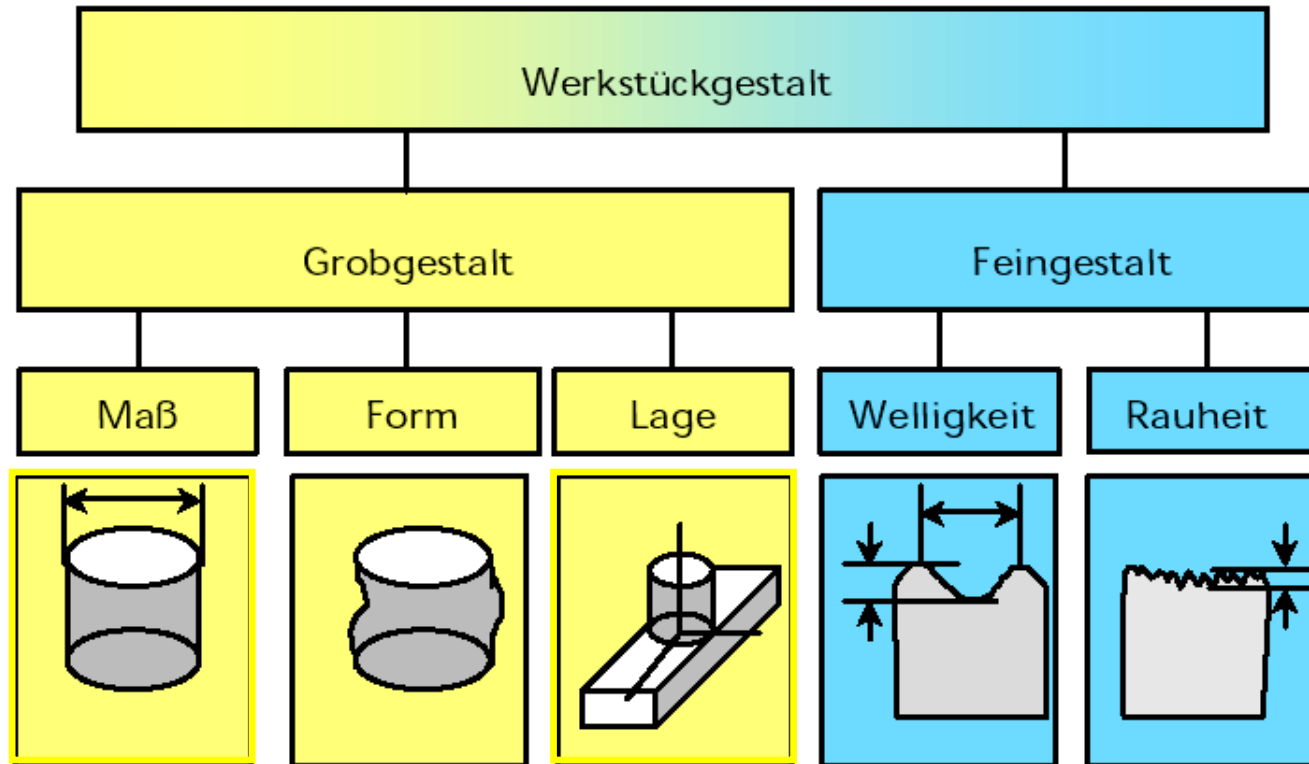
→ Anwendungsbereich

- ▶ gesamter industrieller Bereich (Fertigungsmesstechnik, Prüftechnik, industrielle Messtechnik, Qualitätskontrolle, Reverse Engineering, ...)
- ▶ alle Messbereiche bzw. -volumina (nm bis >>m)

→ Bedeutung der Geometrieelemente resultiert aus

- ▶ funktionale Gründe (Passungen, Führungen, Lager, Normale, ...)
- ▶ einfache und genaue Herstellung (Fertigung)
- ▶ analytisch einfach beschreibbar (Konstruktion)

Einordnung in Fertigungsmesstechnik



Beurteilung der Werkstückgeometrie in der Fertigungsmesstechnik

Stand der Normung: ISO 10360-6

ISO 10360-6:2001

Acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM) - Part 6: Estimation of errors in computing Gaussian associated features


EN ISO 10360-6:2001

Geometrische Produktspezifikation (GPS) - Annahmeprüfung und Bestätigungsprüfung für Koordinatenmessgeräte (KMG) - Teil 6: Abweichungsabschätzung beim Berechnen zugeordneter Geometrieelemente nach Gauß (ISO 10360-6:2001)

Inhalt

- ▶ Begriffe und Definitionen
- ▶ verwandte Normen
- ▶ Anforderungen an Software zur Geometrievermessung
- ▶ Generierung von Referenzdatensätzen (Arten von Referenzdatensätzen, Generieren von Zufallswerten, nominelle Erfassungsbereiche, Addition von Formabweichungen, Stichprobenauswahl)

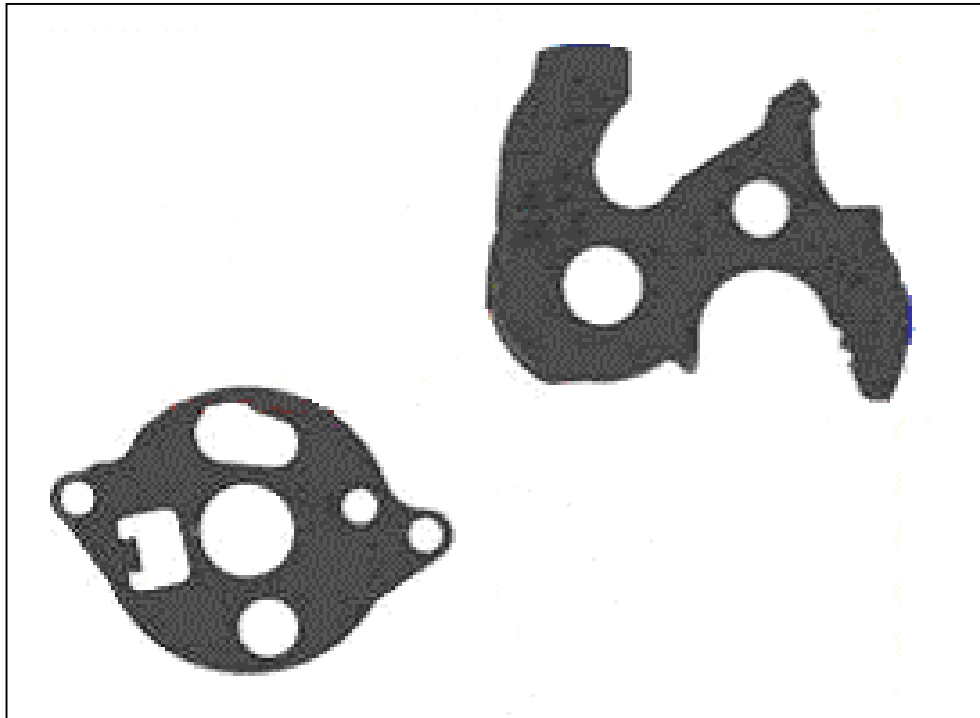
Verfahren der 2D- und 3D-Datengewinnung



[m]	Photogrammetrie, Makro-Laserscanner, alle Arten von Spezial- und Standardkameratechnik (Luftbildkameras, Videokameras, ...)
	klassische Koordinatenmessgeräte, Laserscanner
[mm]	Lichtschnittverfahren (2D und 3D), alle Arten von optischen 3D-Scannern (laufzeitbasiert, triangulationsbasiert), Profil-Projektoren (2D)
[μ m]	Videomikroskope / Messmikroskope (2D), klassische Lichtmikroskope (Weislichtinterferometer, konfokale Mikroskope, Fluoreszenzmikroskope)
	Nahfeld-optische Mikroskope
[nm]	Rastersondenmikroskope (STM Rastertunnel-, AFM Rasterkraft-, MFM Magnetkraftmikroskop), Rasterelektronenmikroskop (REM)

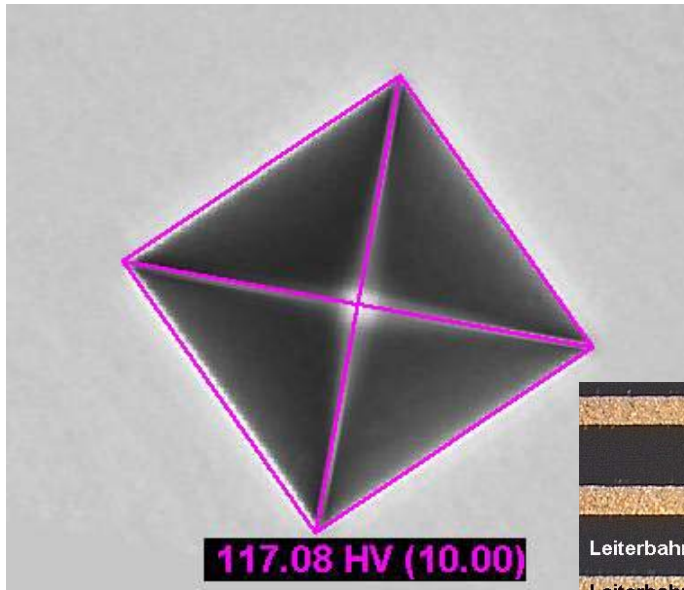
- ▶ Tendenz zu immer größeren Datenmengen

2D- Messdaten: Profilprojektor

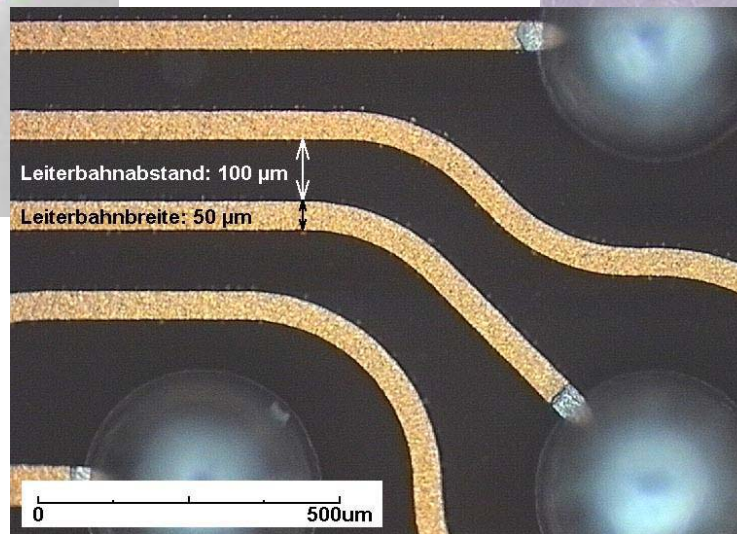


Profil-Projektor TP-3001,
RUPAC Italien

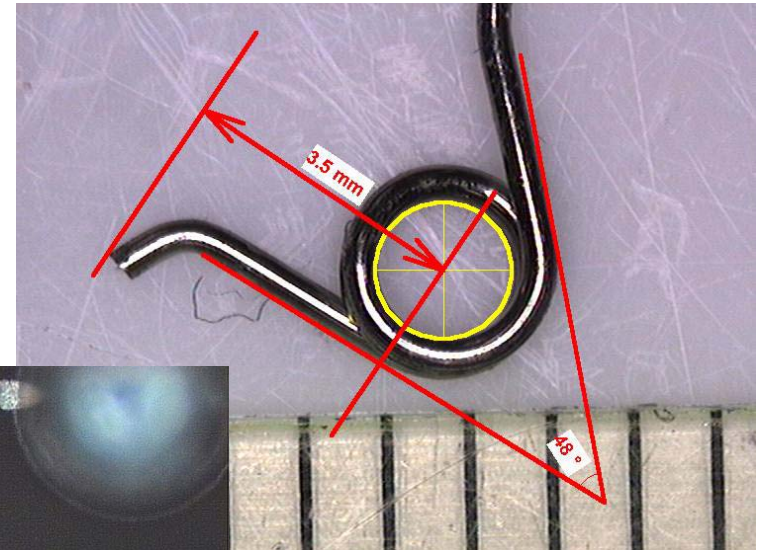
2D- Messdaten: Videomikroskope (1/2)



Härteeindruck
(nach Vickers)



Leiterbahnen (Abstand 0.1mm)



Spiralfeder (\varnothing 1.5mm)

2D- Messdaten: Videomikroskope (2/2)

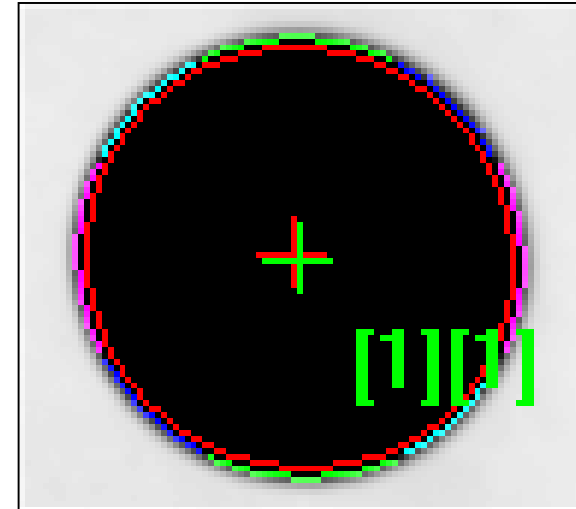
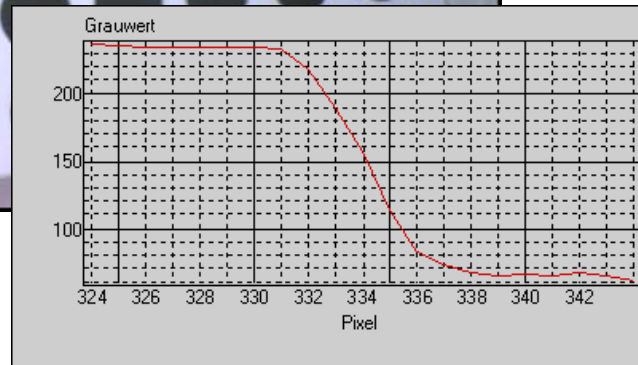
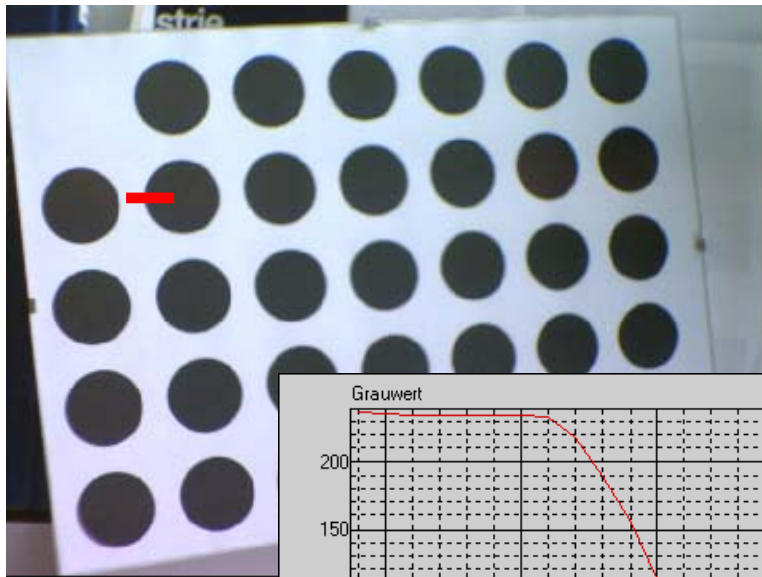


Videomikroskop,
JOMESA Meßsysteme GmbH

2D- Messdaten: Datengewinnung aus Videobildern (1/1)

im Gegensatz zu scannenden 3D-Systemen:

Vorverarbeitung zur Messpunktgewinnung
notwendig: Konturextraktion und -vermessung



Vermessung von Kalibriermarken:

Kreissegmente: Antastrichtungen

Kreis rot: Markenkontur pixelgenau

Kreuz rot: Markenposition pixelgenau

Kreuz grün: Markenposition subpixelgenau

2D- Messdaten: Datengewinnung aus Videobildern (2/2)

Theoretischer Grauwertverlauf:

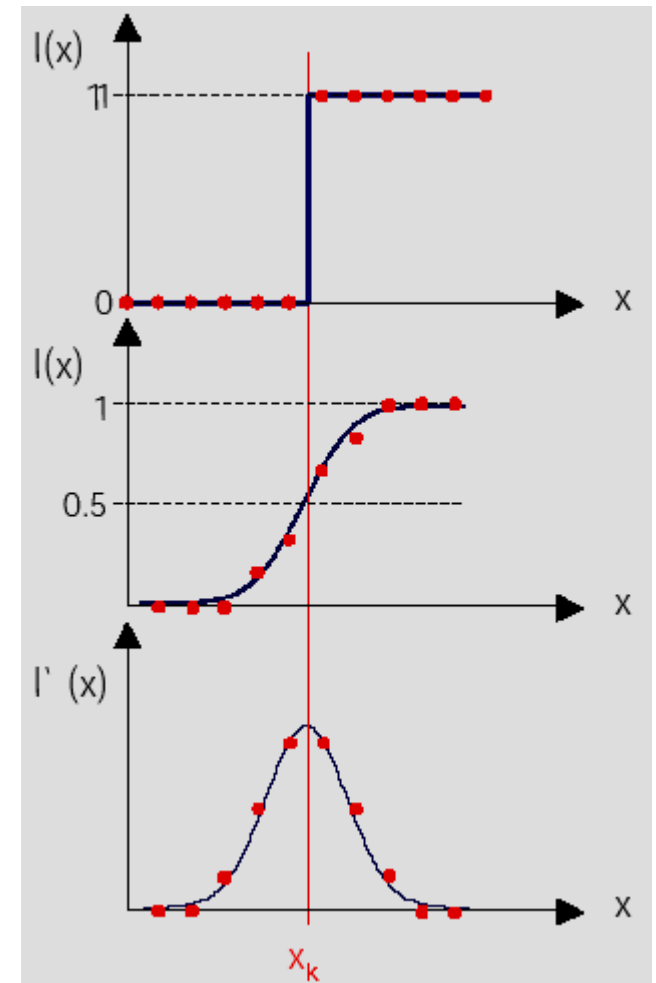
sprunghafte Änderung der Intensität von 0 auf 1 im Kantenort x_k

Realer Grauwertverlauf:

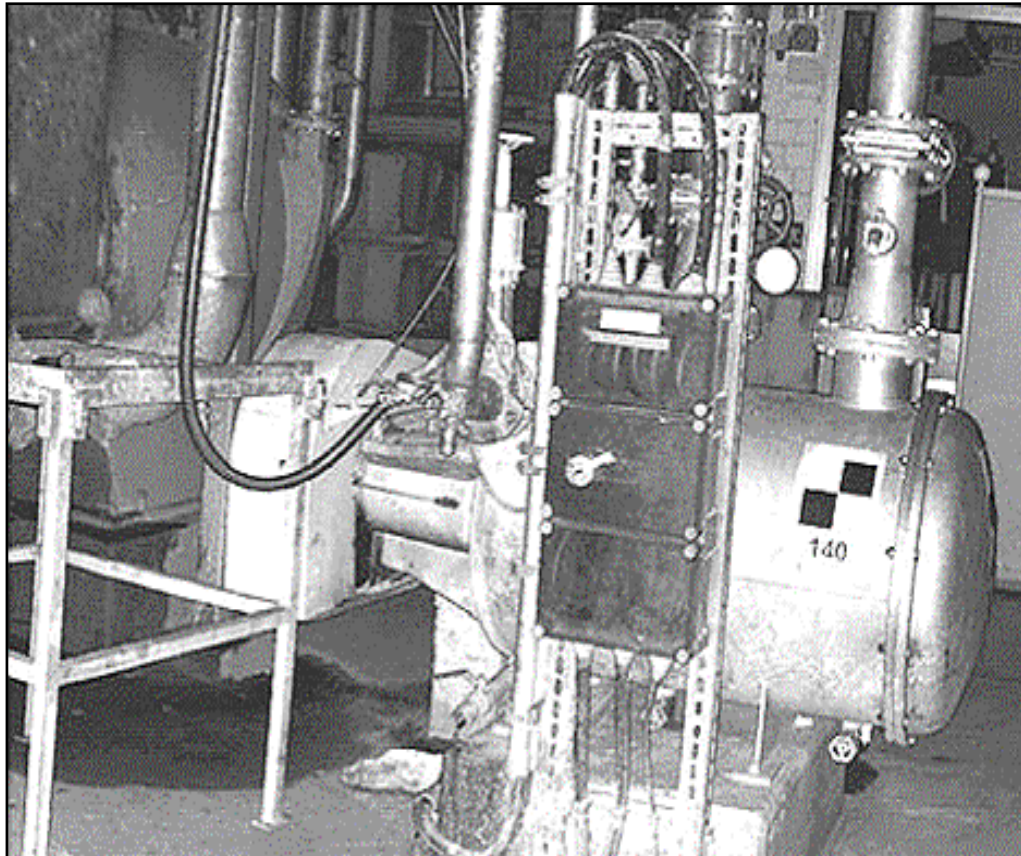
aufgrund der Wirkungen der optischen Abbildung (perspektivische Projektion, Beugung), der Abbildungsoptik (Blenden, PSF, MTF), der Abtastung durch den CCD-Sensor (integrierend) und der anschließenden Auswerteelektronik ergeben sich kontinuierliche Kantenübergänge

Subpixelvermessung:

Modellierung des Helligkeitsverlaufs, Approximation des Grauwertverlaufs und Kantenortberechnung aus den Modellparametern, z.B. stärkster Anstieg, Flächengleichheit, Wendepunkt, ..., Beispiel: Parabelapproximation des Grauwertgradienten und Maximumberechnung



3D- Messdaten: Makro-Laserscanner (1/7)



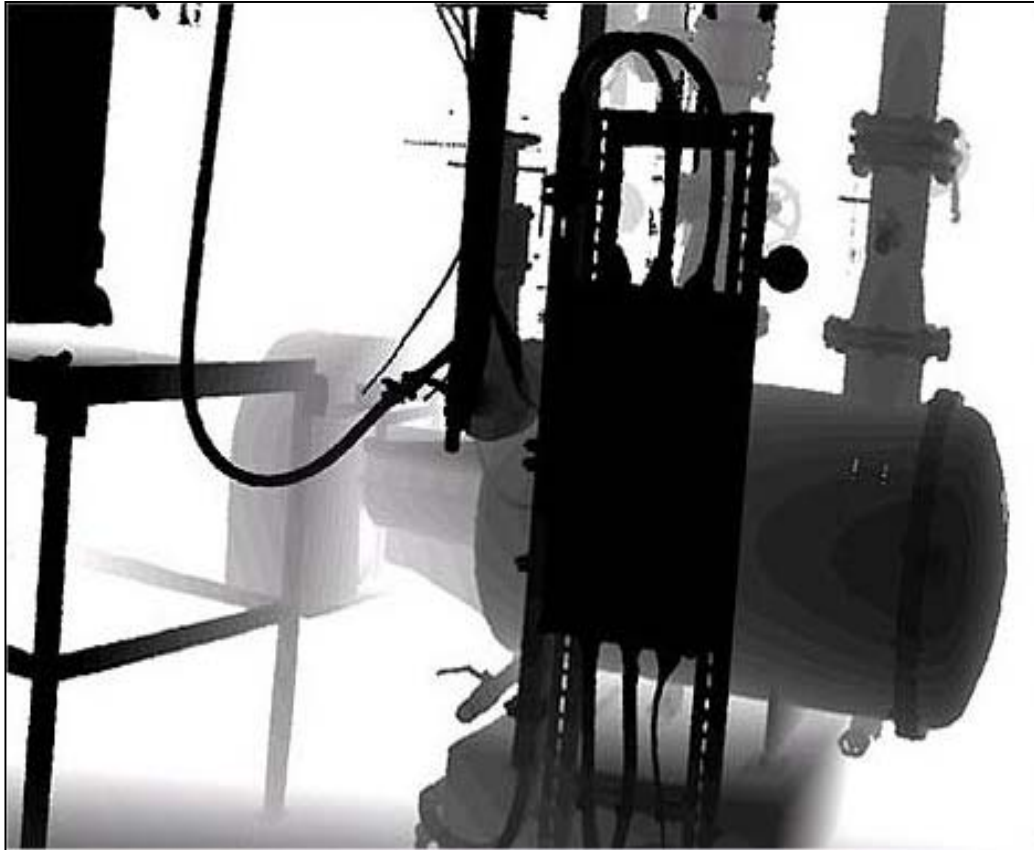
Anwendungen bei

Messvolumina \gg 1m:

- ▶ Baukontrollmessungen (Bauverlauf, -ausführung)
- ▶ Simulation / Kollisionskontrolle (Projektierungsphase)
- ▶ As-Built-Dokumentation (keine, unvollständige oder fehlerhafte Dokumentation)
- ▶ 3D-CAD-Modellbildung

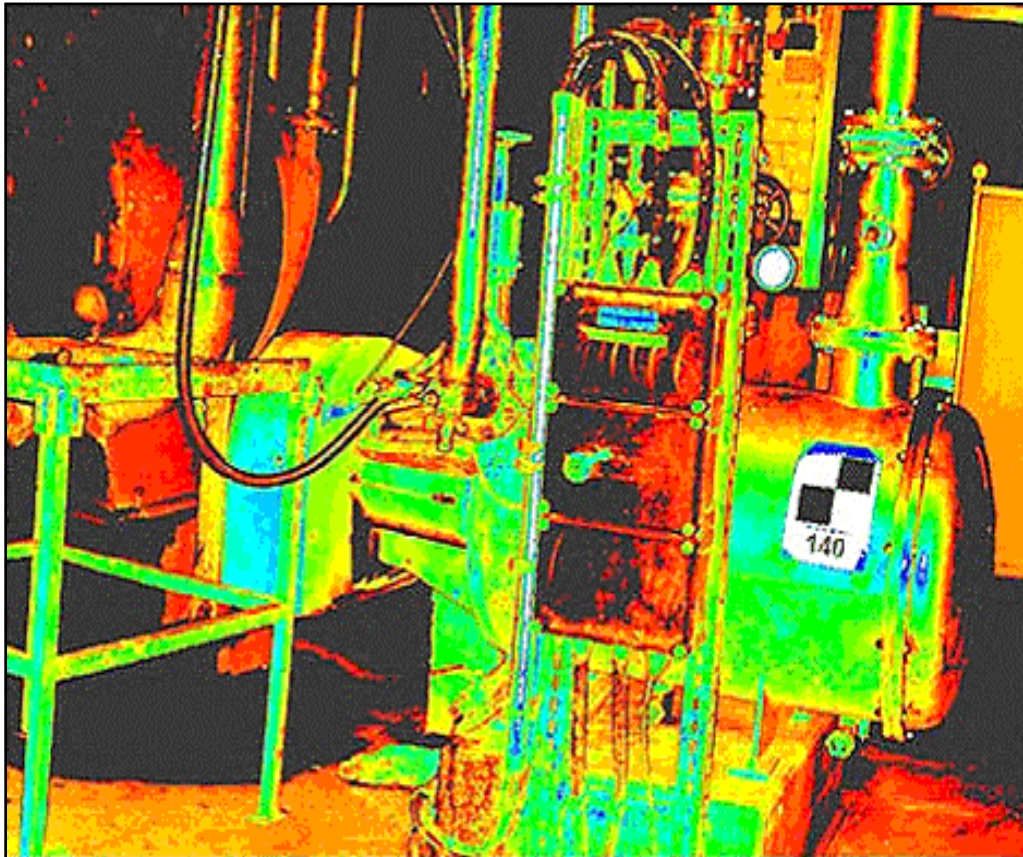
Produktionsbereich in
einer Papierfabrik /
Digitalfoto

3D- Messdaten: Makro-Laserscanner (2/7)



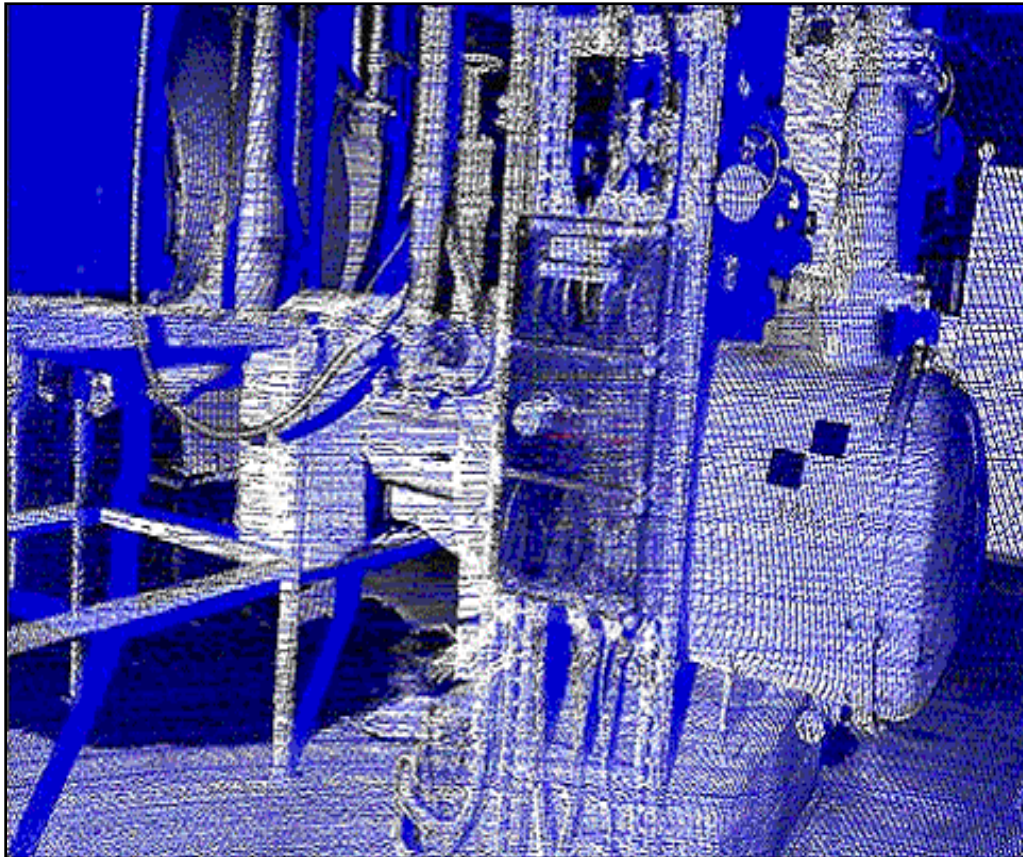
Produktionsbereich in
einer Papierfabrik /
Entfernungsbild

3D- Messdaten: Makro-Laserscanner (3/7)



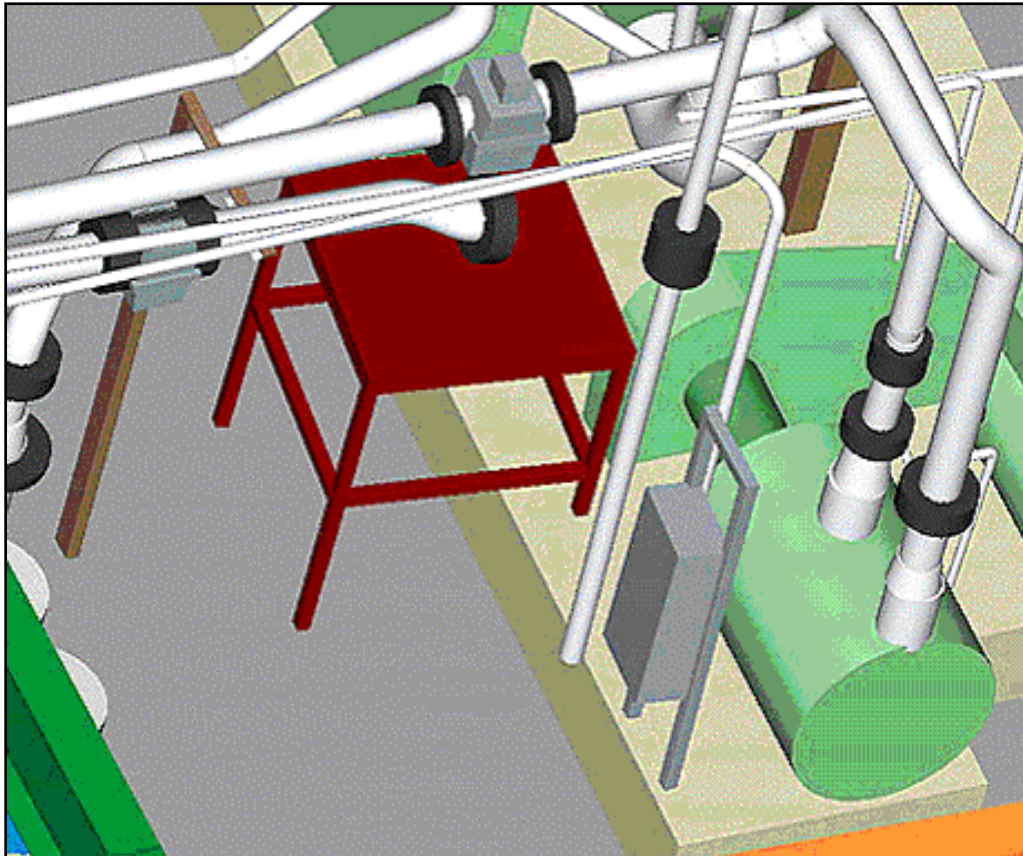
3D-Punktwolke
(volle Auflösung, farb-
kodierte Intensitätswerte)

3D- Messdaten: Makro-Laserscanner (4/7)



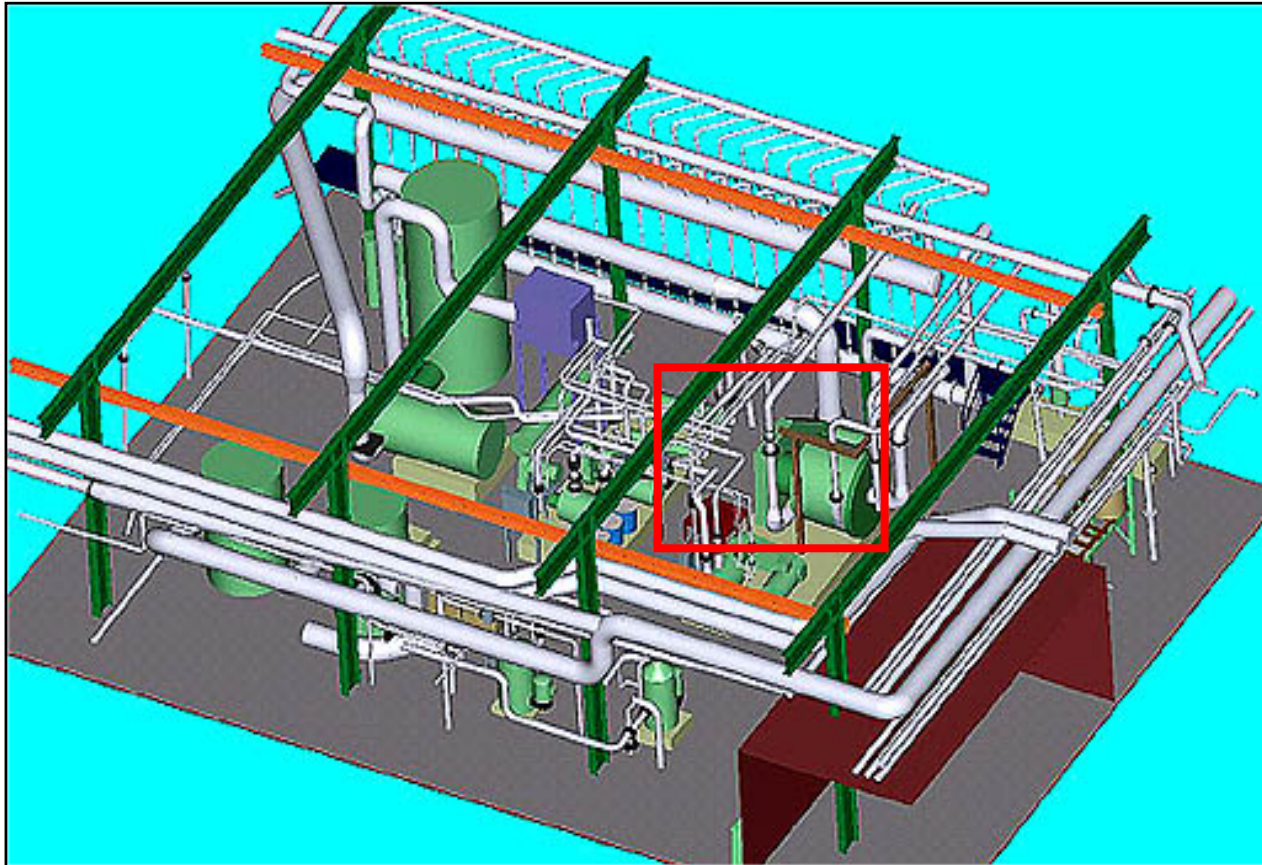
3D-Punktwolke
(reduzierte Auflösung,
Viewpunkt ungleich
Scannerstandort)

3D- Messdaten: Makro-Laserscanner (5/7)



3D-CAD-Modell
(Ausschnitt)

3D- Messdaten: Makro-Laserscanner (6/7)



3D-CAD-Modell
(Gesamtansicht)

3D- Messdaten: Makro-Laserscanner (7/7)



Cyrax® 2500 3D /
Cyra Technologies, Inc.,
USA

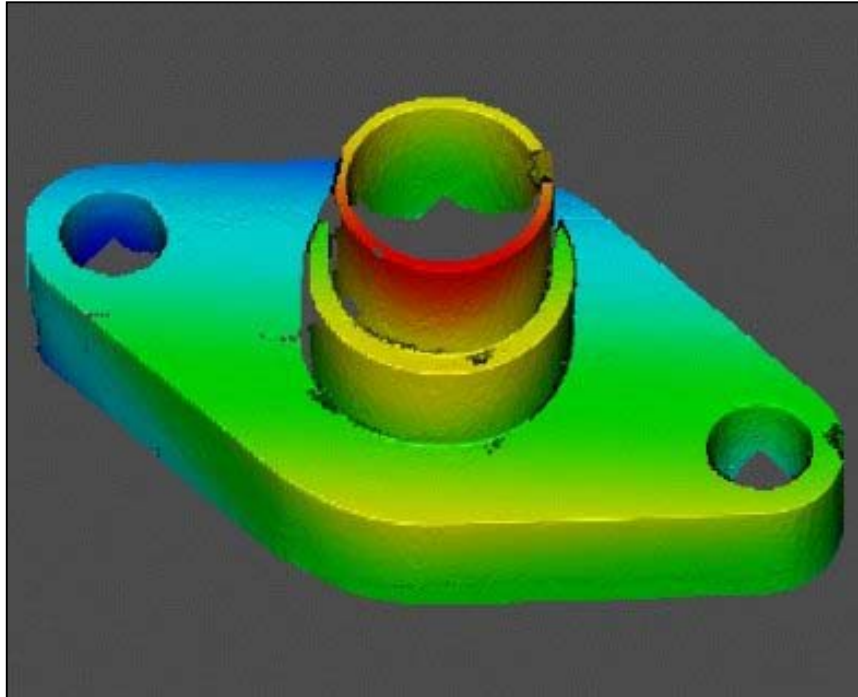


LMS-Z420
RIEGL Laser Measurement
Systems GmbH, Österreich



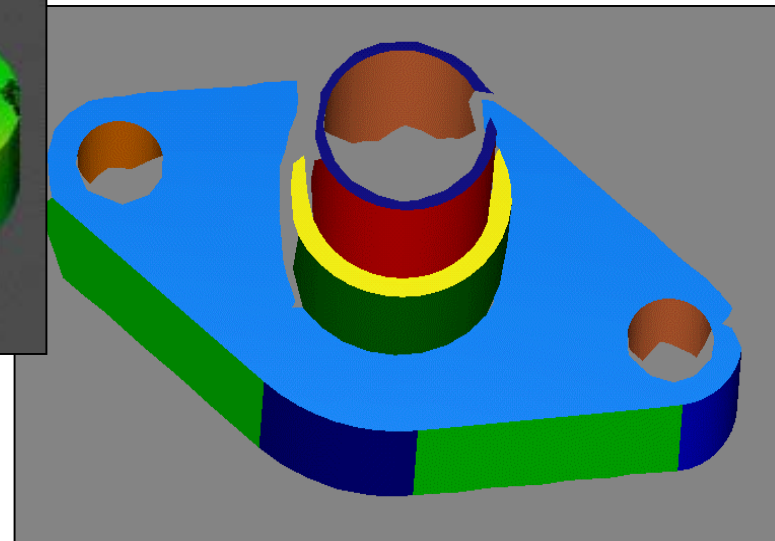
IMAGER 5003,
Zoller+Fröhlich
GmbH, Deutschland

3D- Messdaten: Strukturprojektion und Triangulation (1/6)

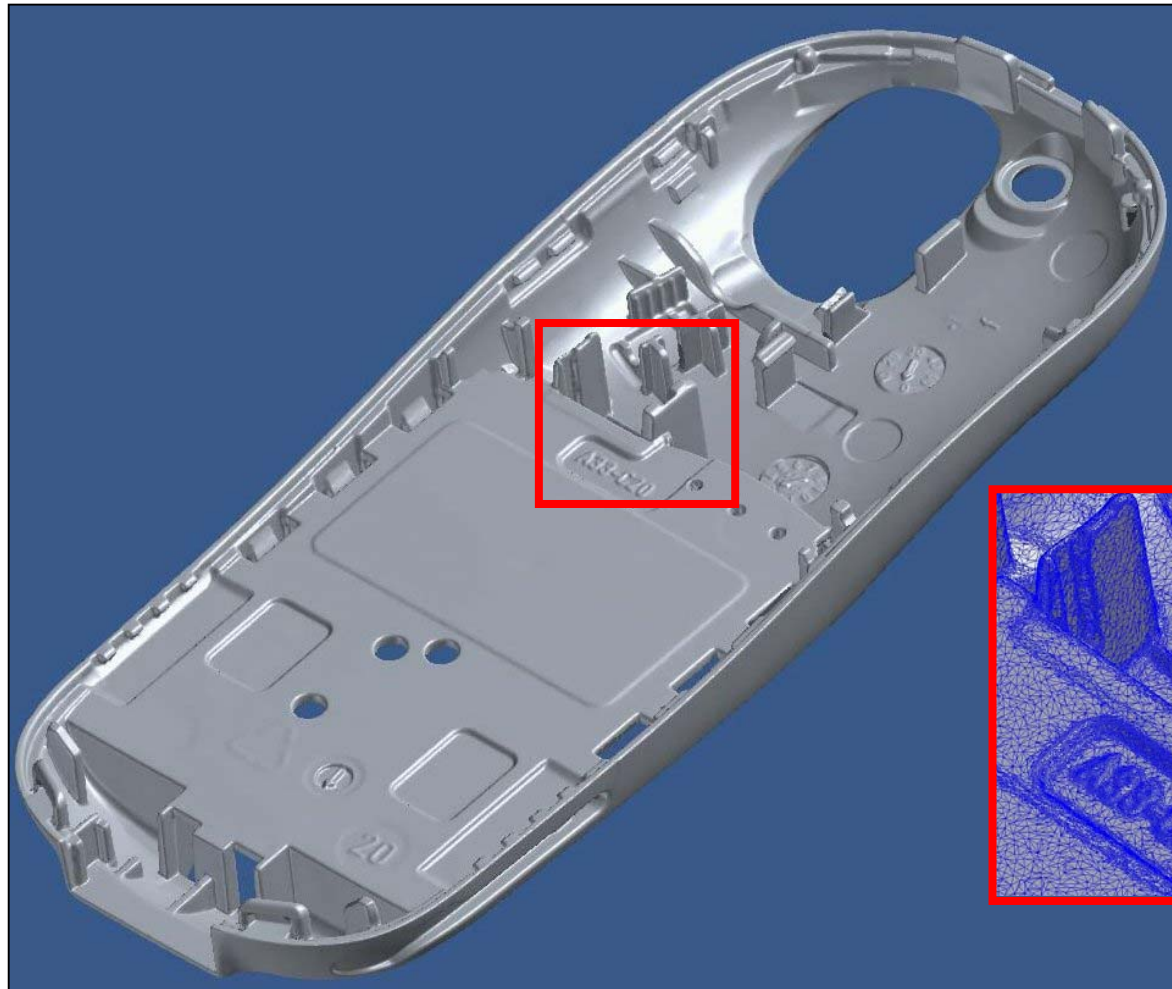


Rohrflansch

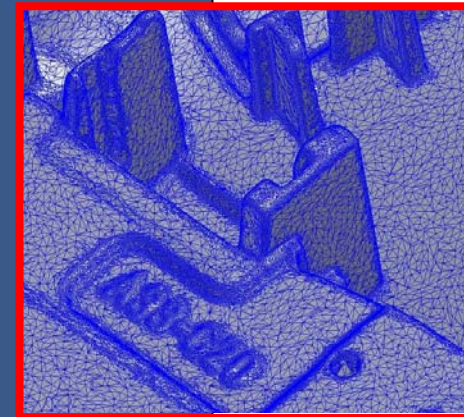
- ▶ links: Punktwolke, Höhenwerte farbkodiert
- ▶ unten: segmentierte Geometrieelemente



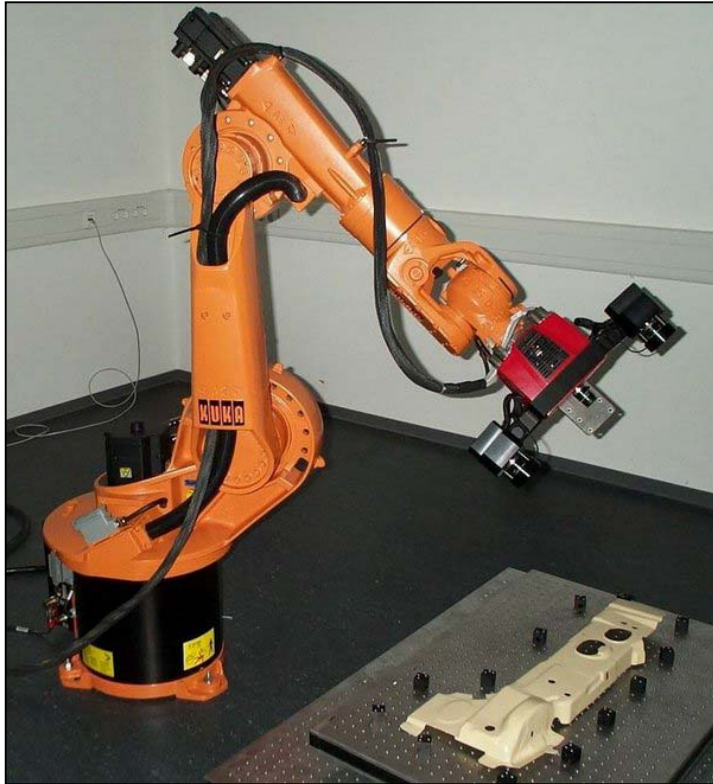
3D- Messdaten: Strukturprojektion und Triangulation (2/6)



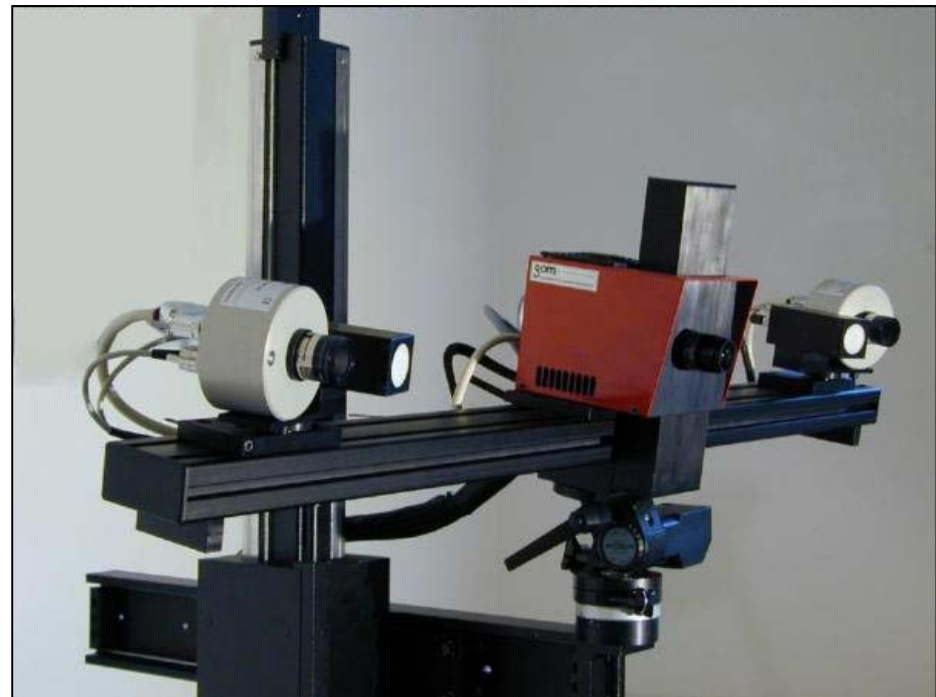
Handygehäuse
Siemens /
vernetzte
Punktewolke,
Gesamtdarstellung
(shading) und
Detail (wireframe)



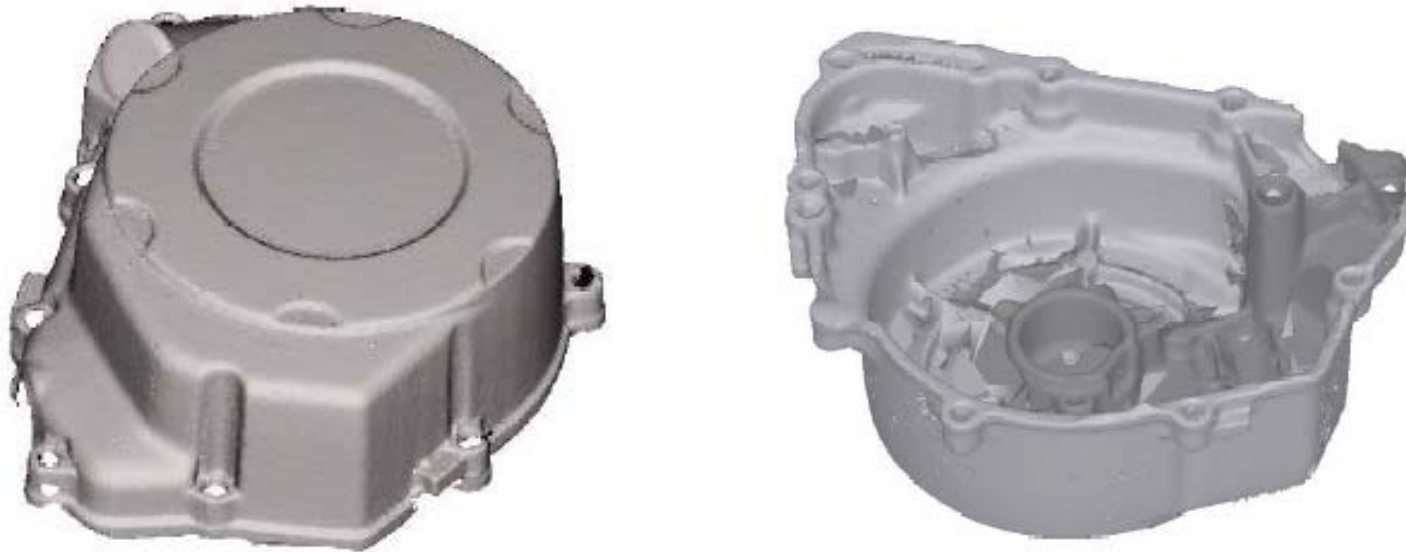
3D- Messdaten: Strukturprojektion und Triangulation (3/6)



System ATOS,
Gesellschaft für Optische
Messtechnik mbH

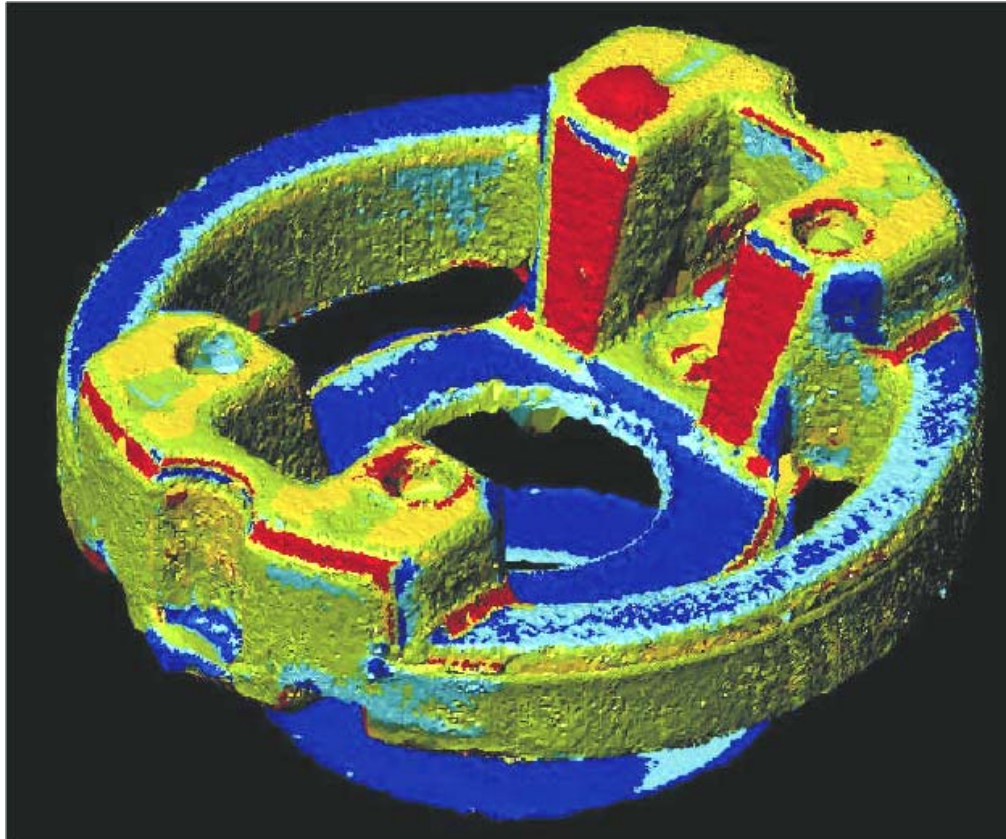


3D- Messdaten: Strukturprojektion und Triangulation (4/6)



Gehäusedeckel, Innen- und Außenansicht

3D- Messdaten: Strukturprojektion und Triangulation (5/6)



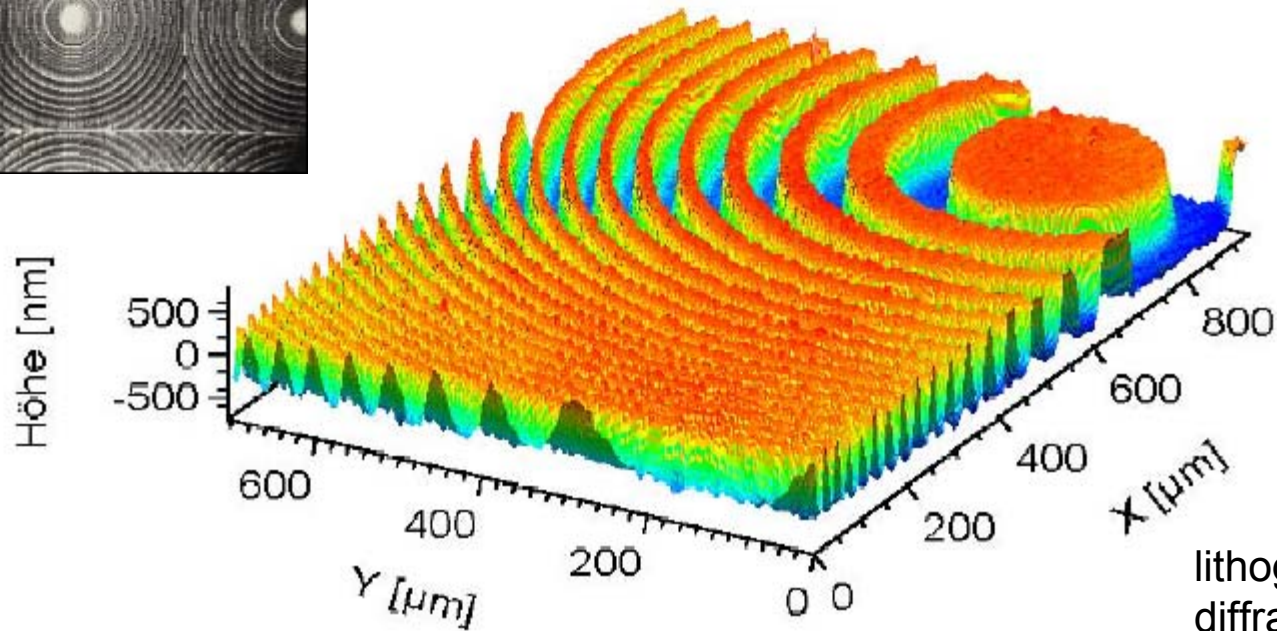
mikromechanische Komponente (\varnothing 8mm)

3D- Messdaten: Strukturprojektion und Triangulation (6/6)



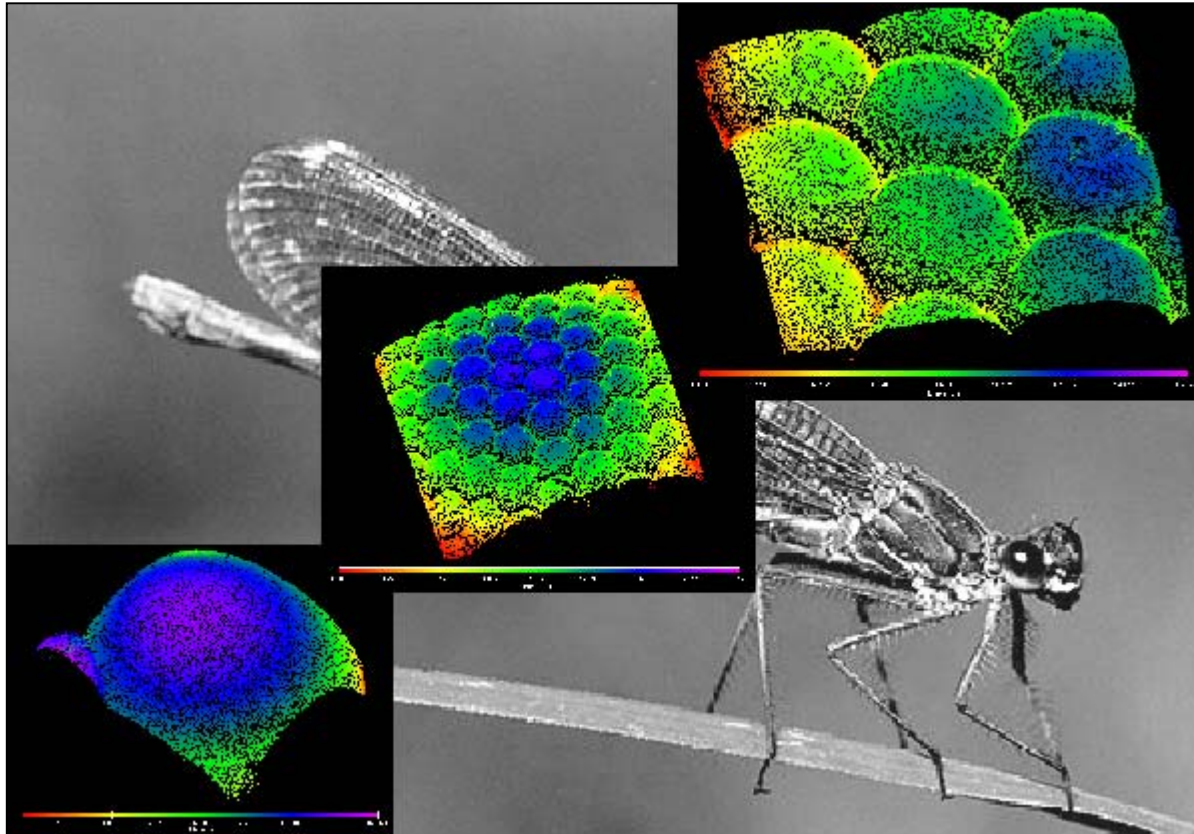
Messsysteme
Kolibri duo (links) und ODKM (oben),
Fraunhofer-Institut für Angewandte Optik
und Feinmechanik in Jena

3D- Messdaten: konfokale Mikroskopie (1/3)



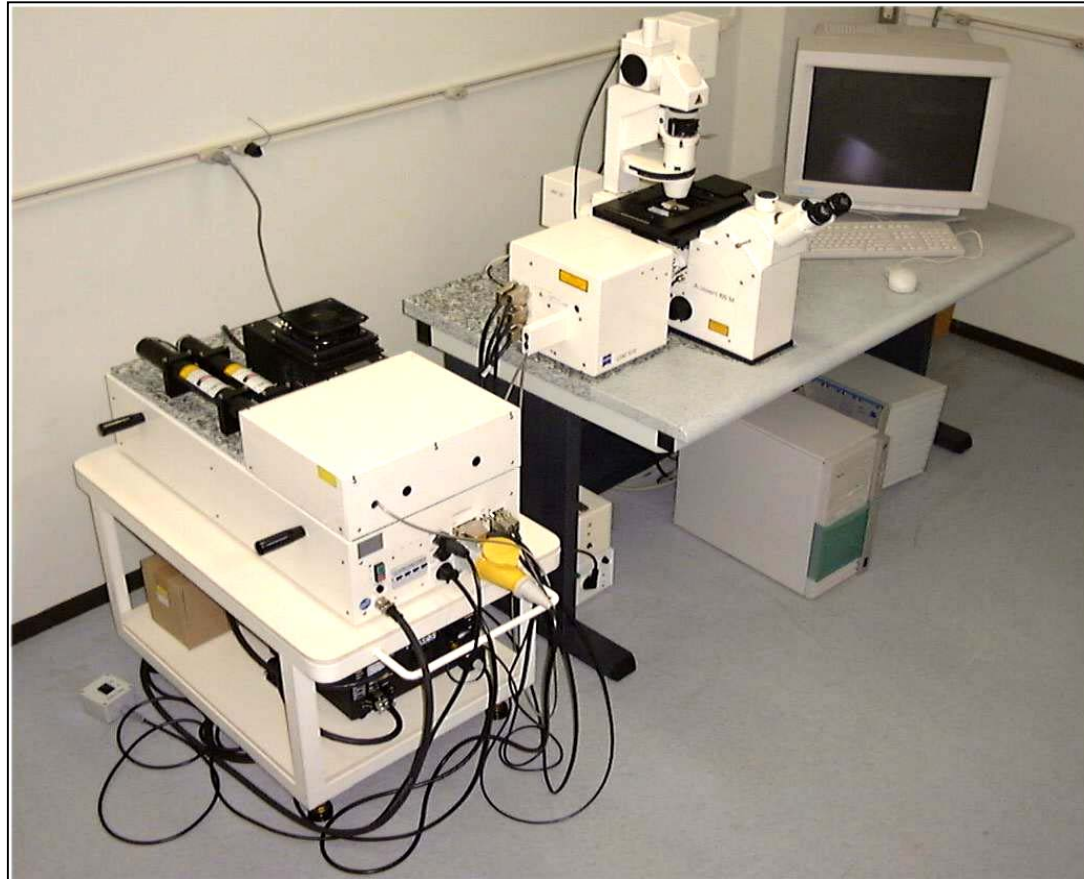
lithographisch hergestellte
diffraktive Mikrolinsen

3D- Messdaten: konfokale Mikroskopie (2/3)



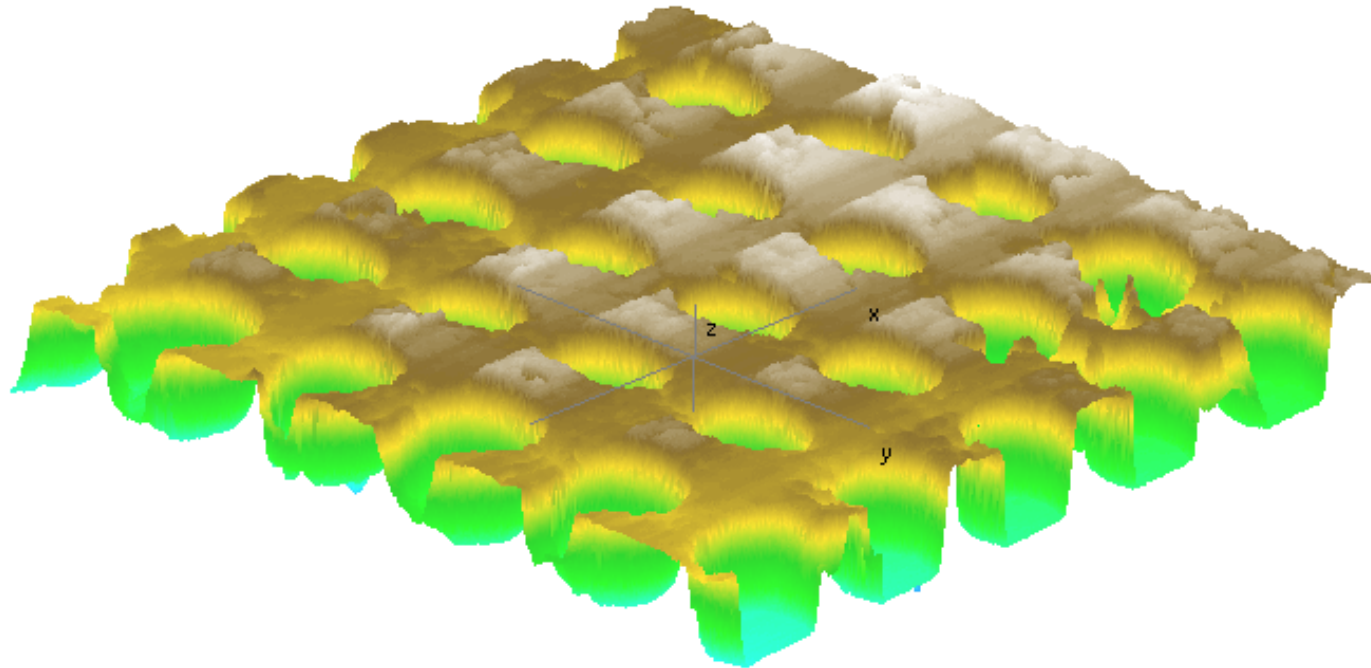
konfokale Aufnahmen
eines Libellenauges für
verschiedene Messfelder

3D- Messdaten: konfokale Mikroskopie (3/3)



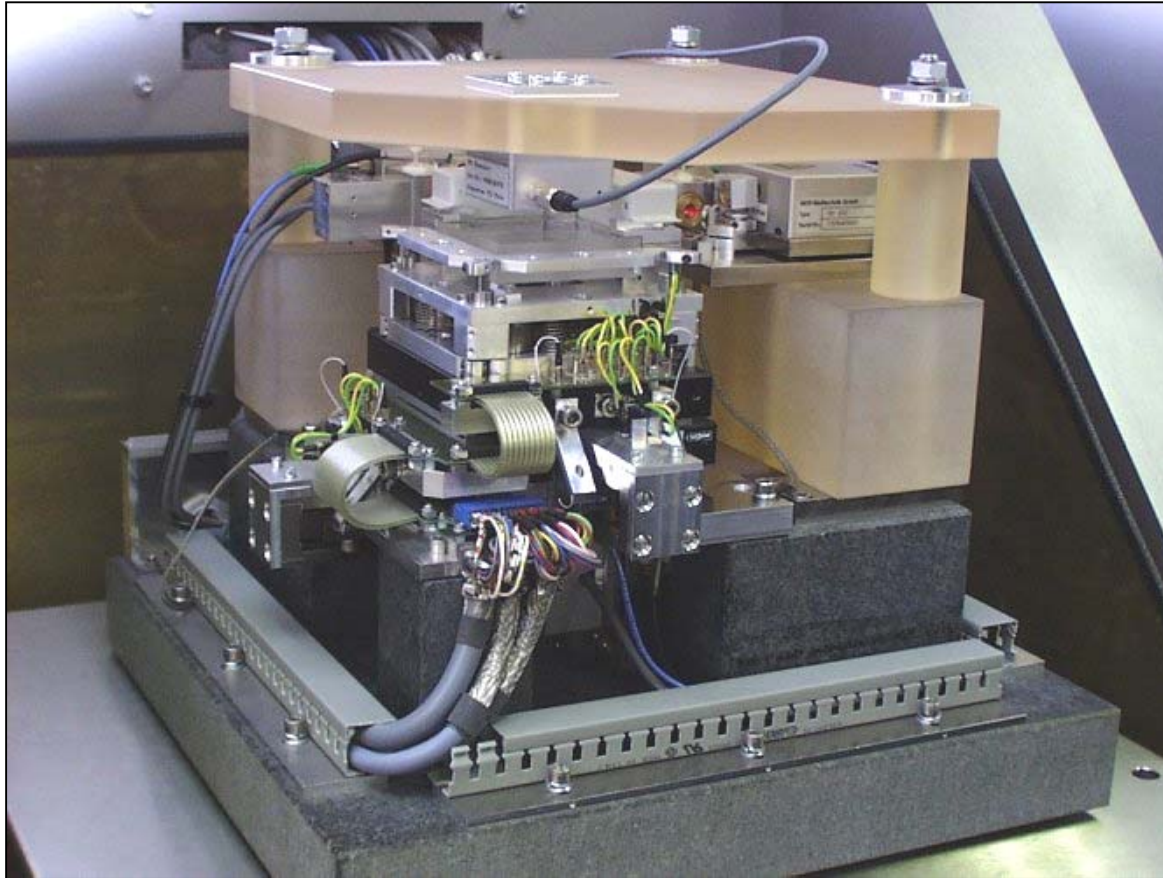
konfokales Mikroskop
LSM 510,
Carl Zeiss GmbH

3D- Messdaten: Atomic-Force-Microscope (1/2)



AFM-Kalibriernormal der Firma Topometric
(Gitterkonstante 5nm, z-Koordinate überhöht dargestellt)

3D- Messdaten: Atomic-Force-Microscope (2/2)



Nanomessmaschine
NMM-1 mit AFM-
Tastkopf von SIS,
TU Ilmenau

Ausgleichsrechnung: Fehlerquadratansatz

→ Aufgabenstellung

- ▶ gegeben sind: K Messpunkte: 2D: $\vec{x}_k = (x_k, y_k)$ oder 3D: $\vec{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$ sowie die Beschreibungsgleichung F des Geometrieelements mit N Parameter a_i
- ▶ Bestimmung der unbekannt Parameter des Geometrieelements

Lösung durch Minimierung der Quadratsumme der senkrechten Abstände der Messpunkte zur betreffenden Kurve bzw. Fläche

→ Ansatz

- ▶ Definition Abstandsfunktion $d_k = F(\vec{a}, \vec{x}_k)$ (senkrechter Abstand)
- ▶ Aufstellung Zielfunktional $Z(a_1 \dots a_N) = \sum_{k=1}^K d_k^2 \rightarrow \text{Minimum}$
- ▶ Ableitung Zielfunktional (partielle Ableitungen), Nullsetzen und Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial Z}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial Z}{\partial a_N} = 0$$

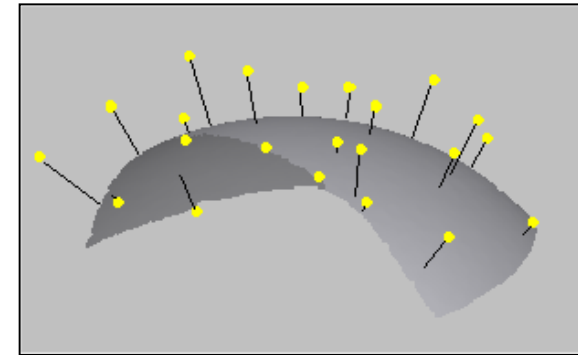
Ausgleichsrechnung: Fehlerquadratansatz

→ andere übliche Bezeichnungen in der Literatur

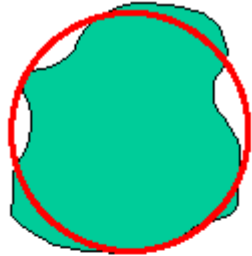
- ▶ Methode der kleinsten Quadrate
- ▶ Gaußsche Fehlerquadratmethode
- ▶ Approximation im Mittel

→ Variationen der Aufgabenstellung

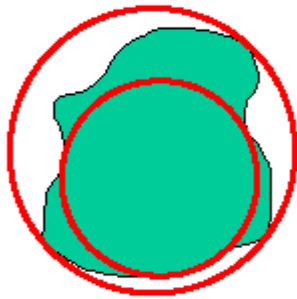
- ▶ Berechnung aller Parameter eines Geometrielements (Standardfall)
- ▶ einige Parameter des Geometrielements sind a-priori bekannt (einzelne Parameter, Form-, Lageparameter)
- ▶ Berücksichtigung externer Nebenbedingungen (Constraints), z.B.
 - ▶ Oberflächenpunkte vorgegeben
 - ▶ Lagerrestriktionen zu anderen Geometrielementen (z.B. parallel, senkrecht, tangential, coaxial, Punkt auf Achse, ...)



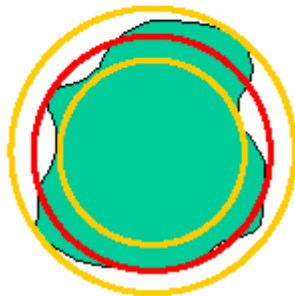
Ausgleichsrechnung: Approximationskriterien in der Fertigungsmesstechnik



Ausgleichselement nach Gauß: Die Summe der Abstandsquadrate aller Messpunkte von der Idealgeometrie werden minimiert.

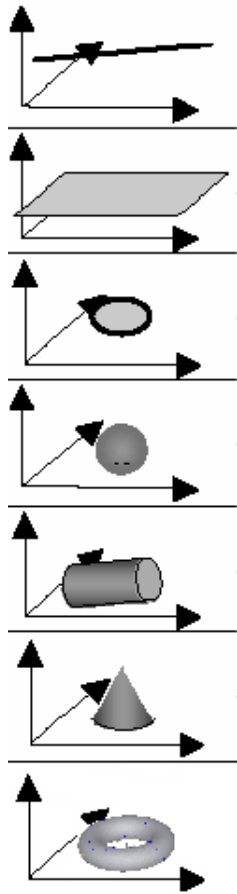


Hüll- und Pferchelement: Das Hüllelement ist das kleinstmögliche Element, das alle Messpunkte umschließt. Das Pferchelement ist das größtmögliche Element, das von allen Messpunkten umschlossen wird. Anwendung: Bestimmung von Formabweichungen: Ermittlung der Paarungsfähigkeit von Geometrieelementen (Kreis und Zylinder)



Ausgleichselement nach Tschebyscheff: Der Betrag des maximalen Abstands aller Messpunkte zum Ausgleichselement wird minimiert. Anwendung: Bestimmung von Formabweichungen

Parametrierung und Mindestmesspunktanzahl



	Anzahl und Art der freien Parameter		Mindestanzahl Messpunkte
Gerade 2D	2	Normale, Abstand zum Ursprung	2
Gerade 3D	4	Zuführungs-, Richtungsvektor	2
Ebene	3	Normale, Abstand zum Ursprung	3
Kreis 2D	3	Mittelpunkt, Radius	3
Kreis 3D	6	Mittelpunkt, Radius, Achsrichtung	3
Ellipse	5	Mittelpunkt, Länge und Richtung Halbachsen	4
Kugel	4	Mittelpunkt, Radius	4
Zylinder	5	Zuführungs-, Richtungsvektor, Radius	5
Kegel	6	Scheitelpunkt, Richtungsvektor, Öffnungswinkel	6
Torus	7	Mittelpunkt, Achsrichtung, Radien	7

Vereinbarungen für Zuführungs-, Richtungsvektor, Normale:
 $\vec{z} \perp \vec{r}$ bzw. $\vec{z} \vec{r} = 0$, $|\vec{r}| = 1$ bzw. $\vec{r}^T \vec{r} = 1$, $|\vec{n}| = 1$ bzw. $\vec{n}^T \vec{n} = 1$

Ausgleichsrechnung: lineares Zielfunktional / inhomogene Form

→ **Abstandsfunktion**
$$d_k = \sum_{i=1}^N a_i f_i^{(k)} - f_0^{(k)}$$

→ **Zielfunktional**
$$Z(a_1 \dots a_N) = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^N a_i f_i^{(k)} - f_0^{(k)} \right)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

→ **Normalgleichungssystem**

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_N^{(k)} \\ \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_N^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_N^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K f_0^{(k)} f_1^{(k)} \\ \sum_{k=1}^K f_0^{(k)} f_2^{(k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^K f_0^{(k)} f_N^{(k)} \end{pmatrix}$$

→ **Lösung von $Ma = b$ z.B. durch Cholesky-Verfahren**
 (M ist symmetrisch und positiv definit)

Ausgleichsrechnung: lineares Zielfunktional / homogene Form

→ **Abstandsfunktion**

$$d_k = \sum_{i=1}^N a_i f_i^{(k)}$$

Vermeidung der trivialen Lösung $a_i = 0$ durch Einführung der Nebenbedingung $\vec{a}^T \vec{a} = 1$, Formulierung durch sog. *Lagrange* - Multiplikator λ

→ **Zielfunktional**

$$Z(a_1 \dots a_N) = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^N a_i f_i^{(k)} - \lambda (\vec{a}^T \vec{a} - 1) \right)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

→ **spezielles Eigenwertproblem**

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_1^{(k)} f_N^{(k)} \\ \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_2^{(k)} f_N^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_1^{(k)} & \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_2^{(k)} & \dots & \sum_{k=1}^K f_N^{(k)} f_N^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

→ **Lösung von $M a = \lambda a$ z.B. durch Verfahren von Mises** (i.A. ist die Ermittlung des zum betragsgrößten oder -kleinsten Eigenwert gehörenden Eigenvektors ausreichend)

Ausgleichsrechnung: nichtlineares Zielfunktional (Gauß-Newton-Verfahren)

→ **Abstandsfunktion**

$$d_k = F(\vec{a}, \vec{x}_k)$$

→ **Zielfunktional**

$$Z(a_1, \dots, a_N) = \sum_{k=1}^K \left(F^{(k)}(\vec{a}, \vec{x}_k) \right)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

→ **Idee: sukzessive Verbesserung einer Startlösung**

$$\vec{a}^{l+1} = \vec{a}^l + \Delta \vec{a}^l$$

- ▶ Taylor-Reihenentwicklung von F (Abbruch nach 2. Glied) liefert neues Zielfunktional, hier ist \vec{a}^l gegeben (alte Näherung) und der Schrittvektor $\Delta \vec{a}^l$ unbekannt
- ▶ eine Minimierung des Fehlers für einen Iterationsschritt kann nun durch Lösung der linearen Ausgleichsaufgabe für $\Delta \vec{a}^l$ erfolgen

→ **Normalgleichungssystem** ($F'(\vec{a}^l)$ ist Jakobimatrix, Größe $K \times N$)

$$F'(\vec{a})^T F'(\vec{a}) \Delta \vec{a}^l = F'(\vec{a})^T F(\vec{a}) \quad \text{bzw.} \quad F'(\vec{a}) \Delta \vec{a} = F(\vec{a})$$

→ Lösung z.B. durch

Cholesky-Verfahren

bzw.

QR-Zerlegung

Ausgleichsrechnung: nichtlineares Zielfunktional / praktische Aspekte

→ Numerik:

QR-Zerlegung (Lösung überbestimmtes Gleichungssystem) ist numerisch stabiler, verwendet wird i.a. die Housholder-Transformation

→ Bestimmung der Jakobimatrix:

zur Vermeidung der analytische Ableitung der Zielfunktion kann mit einer Approximation durch Differenzenquotienten gearbeitet werden

→ Konvergenz:

- ▶ für eine globale Konvergenz sind ausreichend genaue Startwerte erforderlich
- ▶ wegen der unvollständigen Reihenentwicklung ist $\Delta\vec{a}^l$ ungenau, Modifikationen des Gauß-Newton-Verfahrens:
 - ▶ Dämpfungsverfahren: $\Delta\vec{a}^l$ wird anhand von Konvergenztests skaliert
 - ▶ Levenberg-Marquardt-Verfahren: Mischung aus Gradientenabstiegsverfahren (\vec{a}^l weit entfernt von \vec{a}^l_{\min}) und Gauß-Newton-Verfahren (in Minimumnähe)

Ausgleichsrechnung: nichtlineares Zielfunktional / praktische Aspekte

→ Gewichtung der Messwerte

- ▶ in der Praxis können zu den Messpunkten Qualitätswerte gegeben sein
- ▶ Berücksichtigung der Qualitätswerte als Gewichtung des Fittingfehlers pro Messpunkt

→ Abbruchkriterien

- ▶ absoluter Fehler RMS (root mean square): $Error_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum (w_k d_k^2)}{\sum w_k}}$
- ▶ relativer Fehler (RMS-Änderung bezogen auf Gesamtfehler):

$$Error_{relativ} = \frac{RMS_l - RMS_{l+1}}{RMS_{l+1}}$$

- ▶ maximal zulässige Anzahl von Iterationsschritten

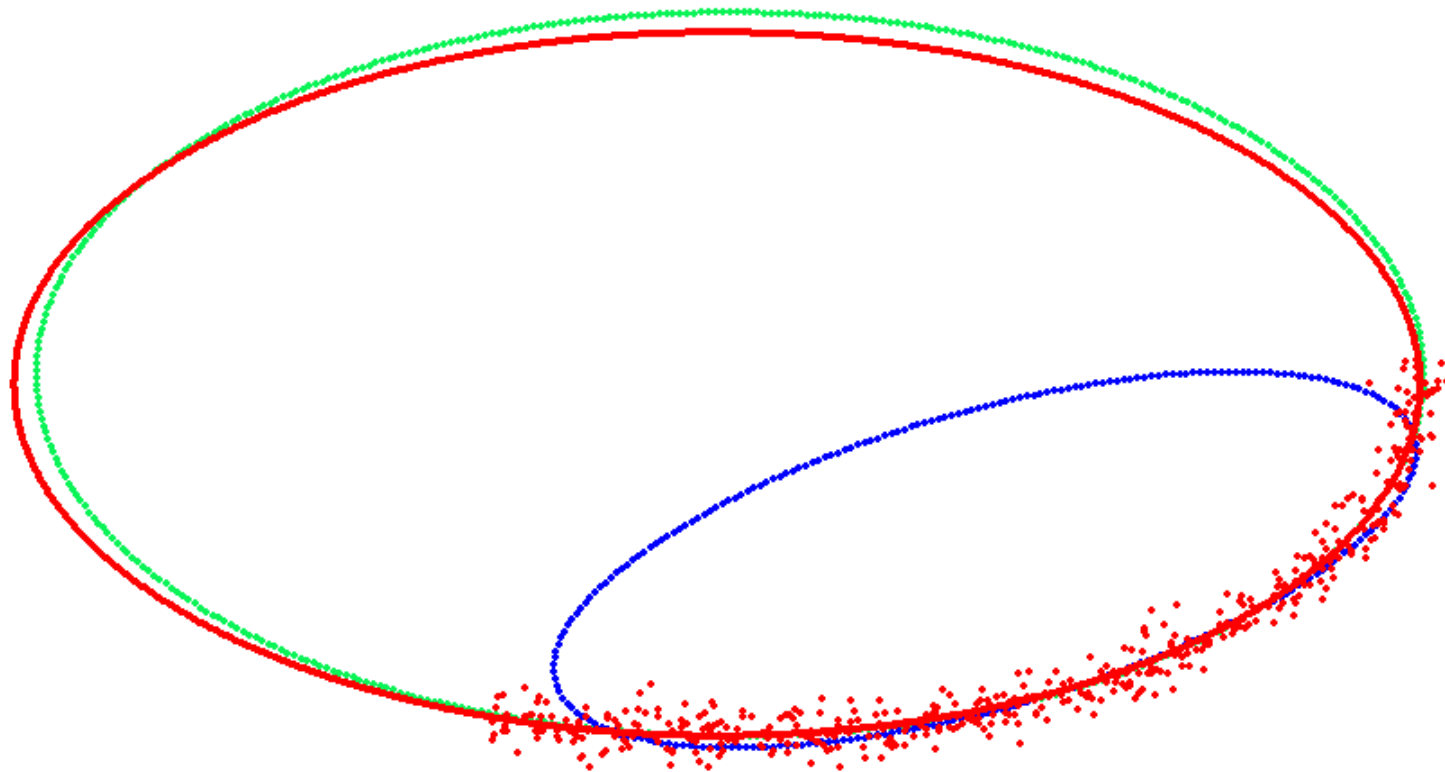
lineares Zielfunktional, inhomogene Form, Beispiel

Kreisapproximation durch lineare Näherungsfunktion

- **Kreisgleichung** $(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$
- **Umformung** $-2xm_x - 2ym_y + m_x^2 + m_y^2 - r^2 + x^2 + y^2 = 0$
- **Substitution** $a_1 = -2m_x, a_2 = -2m_y, a_3 = m_x^2 + m_y^2 - r^2,$
 $f_1^{(k)} = x_k, f_2^{(k)} = y_k, f_3^{(k)} = 1, f_0^{(k)} = -(x_k^2 + y_k^2)$
- **Normalgleichungssystem**

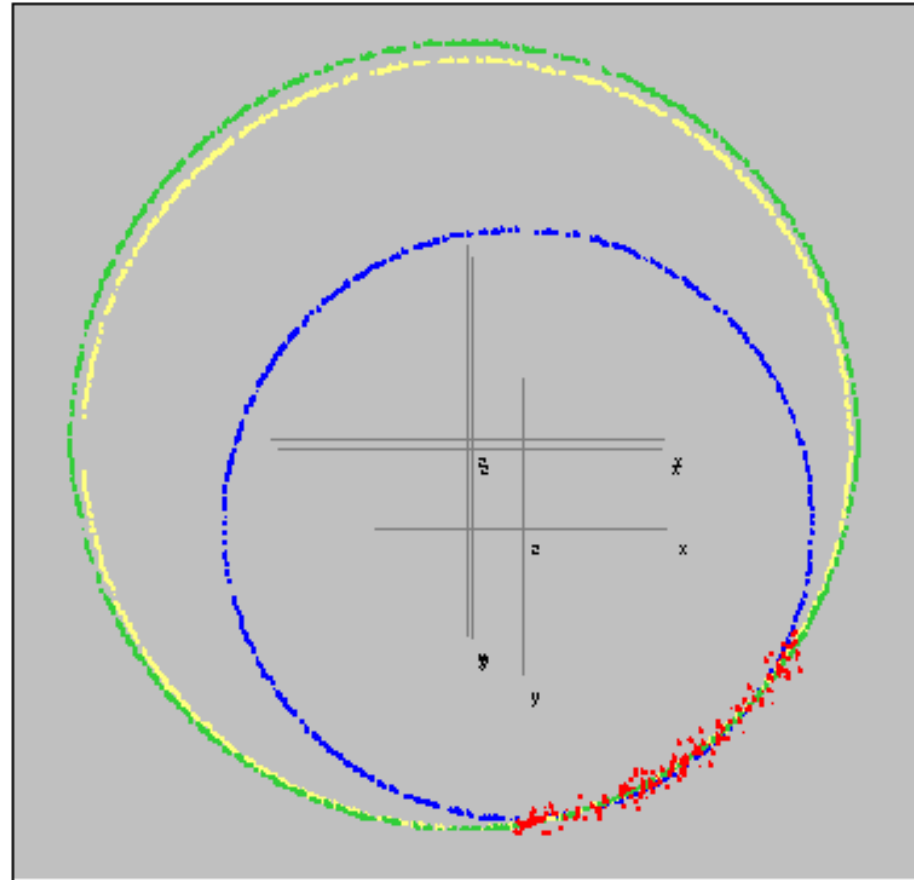
$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K x_k^2 & \sum_{k=1}^K x_k y_k & \sum_{k=1}^K x_k \\ \sum_{k=1}^K x_k y_k & \sum_{k=1}^K y_k^2 & \sum_{k=1}^K y_k \\ \sum_{k=1}^K x_k & \sum_{k=1}^K y_k & \sum_{k=1}^K 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2m_x \\ -2m_y \\ (m_x^2 + m_y^2 - r^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{k=1}^K ((x_k^2 + y_k^2)x_k) \\ -\sum_{k=1}^K ((x_k^2 + y_k^2)y_k) \\ -\sum_{k=1}^K (x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix}$$

Ellipsenapproximation, geometrische und algebraische Lösung



- rot: **Sollellipse und verrauschte Punkte eines Ellipsensegments (Stützstellen)**
- blau: **algebraische Lösung, Näherungslösung**
- grün: **geometrische Lösung, Fehlerquadratapproximation des senkrechten Abstands**

Kreisapproximation, geometrische und algebraische Lösung



- grün / rot: Sollkreis und verrauschte Punkte eines Kreissegments (Stützstellen)
- blau: algebraische Lösung, Näherungslösung
- gelb: geometrische Lösung, Fehlerquadratapproximation des senkrechten Abstands

lineares Zielfunktional, homogene Form, Beispiel

2D-Geradenapproximation

→ **Geradengleichung** $n_x x + n_y y + d = 0$ (hier: nichtnormierte Parameter)

→ **Ansatz** $a_1 = n_x, a_2 = n_y, a_3 = d$ und $f_1^{(k)} = x_k, f_2^{(k)} = y_k, f_3^{(k)} = 1$

→ **Normalgleichungssystem**

$$\frac{1}{K} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K x_k^2 & \sum_{k=1}^K x_k y_k & \sum_{k=1}^K x_k \\ \sum_{k=1}^K x_k y_k & \sum_{k=1}^K y_k^2 & \sum_{k=1}^K y_k \\ \sum_{k=1}^K x_k & \sum_{k=1}^K y_k & \sum_{k=1}^K 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ d \end{pmatrix}$$

→ gesucht wird der zum größten Eigenwert gehörende Eigenvektor, da genau

dann die Zielfunktion $\sum_{k=1}^K (n_x x_k + n_y y_k + d - \lambda(n_x^2 + n_y^2 + d^2 - 1))^2$ minimal wird

nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Zylinderfitting

→ **Abstandsfunktion** $d_k = |\vec{r} \times (\vec{x}_k - \vec{z})| - rad$ (Achsabstand abzüglich Radius)

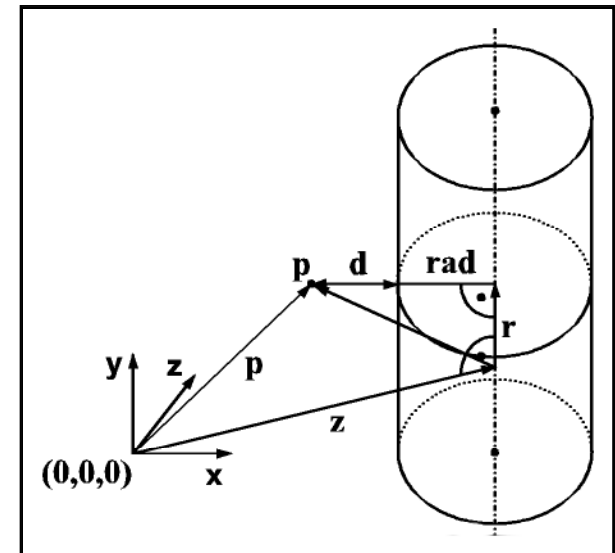
→ **Zielfunktion** $Z = \sum_{k=1}^K (|\vec{r} \times (\vec{x}_k - \vec{z})| - rad)^2$

→ **Ableitungen**
(mit $g_k = \vec{r} \cdot (\vec{x}_k - \vec{z})$ und $f_k = |\vec{r} \times (\vec{x}_k - \vec{z})|$)

$$\frac{\partial d_k}{\partial z_x} = \frac{r_x g_k - (x_{xk} - z_x)}{f_k} \quad \frac{\partial d_k}{\partial r_x} = \frac{g_k [r_x g_k - (x_{xk} - z_x)]}{f_k}$$

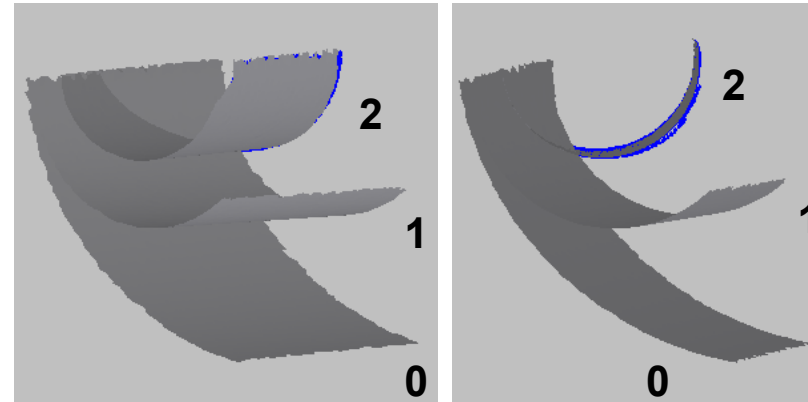
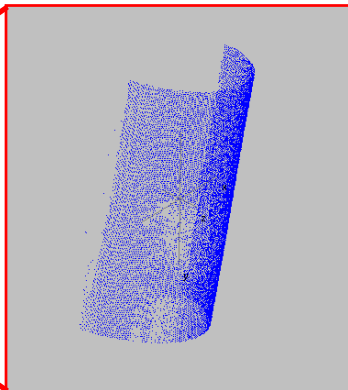
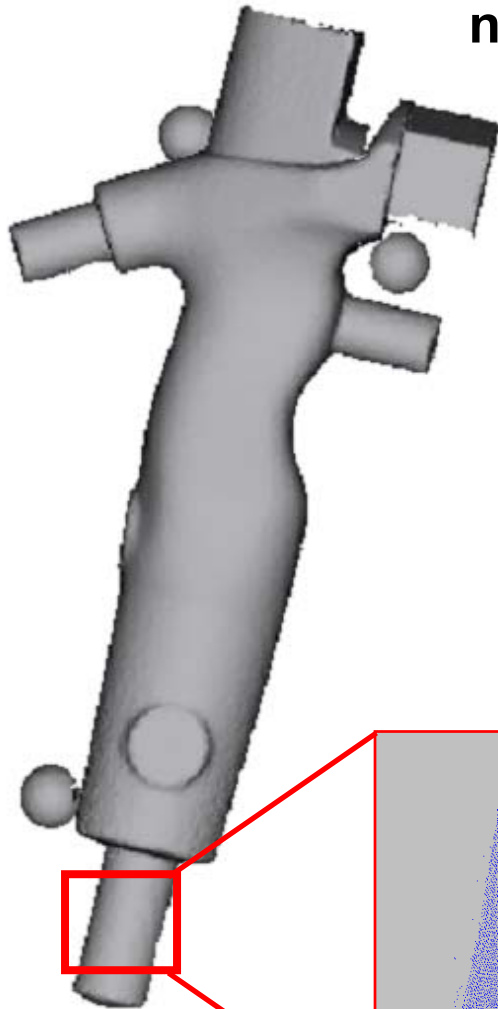
$$\frac{\partial d_k}{\partial z_y} = \frac{r_y g_k - (x_{yk} - z_y)}{f_k} \quad \frac{\partial d_k}{\partial r_y} = \frac{g_k [r_y g_k - (x_{yk} - z_y)]}{f_k}$$

$$\frac{\partial d_k}{\partial z_z} = \frac{r_z g_k - (x_{zk} - z_z)}{f_k} \quad \frac{\partial d_k}{\partial r_z} = \frac{g_k [r_z g_k - (x_{zk} - z_z)]}{f_k} \quad \frac{\partial d_k}{\partial rad} = -1$$



nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Zylinderfitting

Vermessung des Anschlußstutzens eines Spritzgußteils

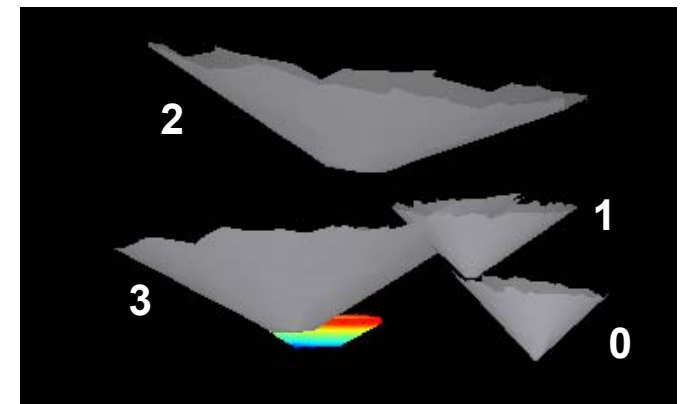
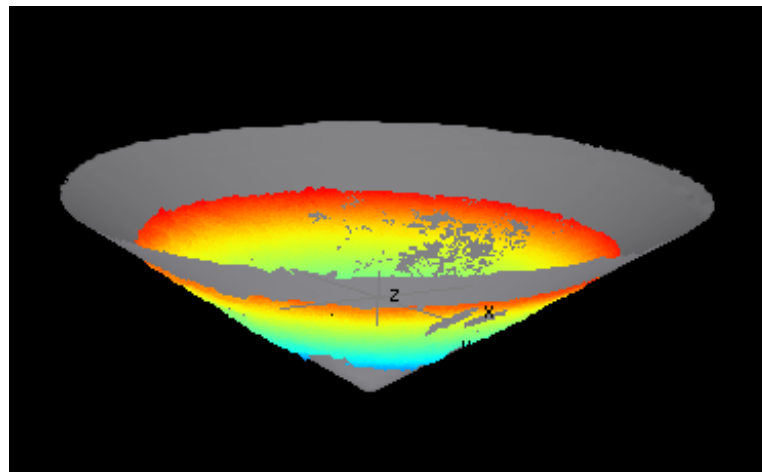
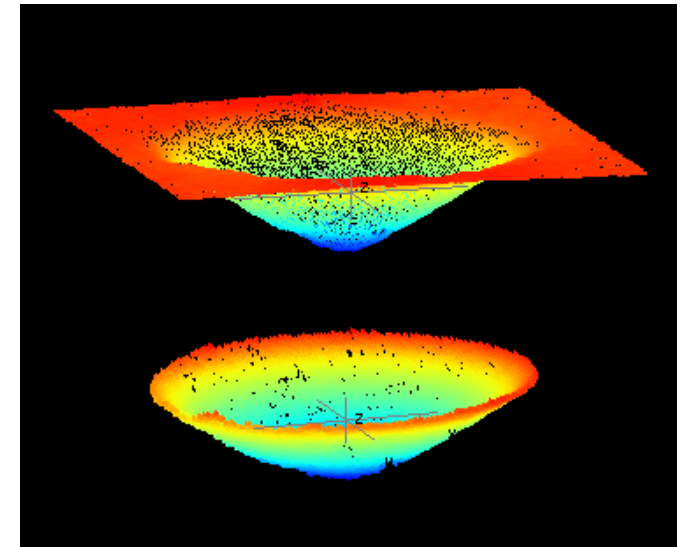


Iteration	RMS	dRMS _{relativ}
0	10.5793	-
1	6.40806	0.394284
2	1.64117	0.743889
3	0.0850883	0.948154
4	0.029304	0.655605
5	0.029304	0.655605
6	0.0292892	0.000504453
7	0.0292892	1.63323e-10
8	0.0292892	1.23568e-15
9	0.0292892	2.33034e-16

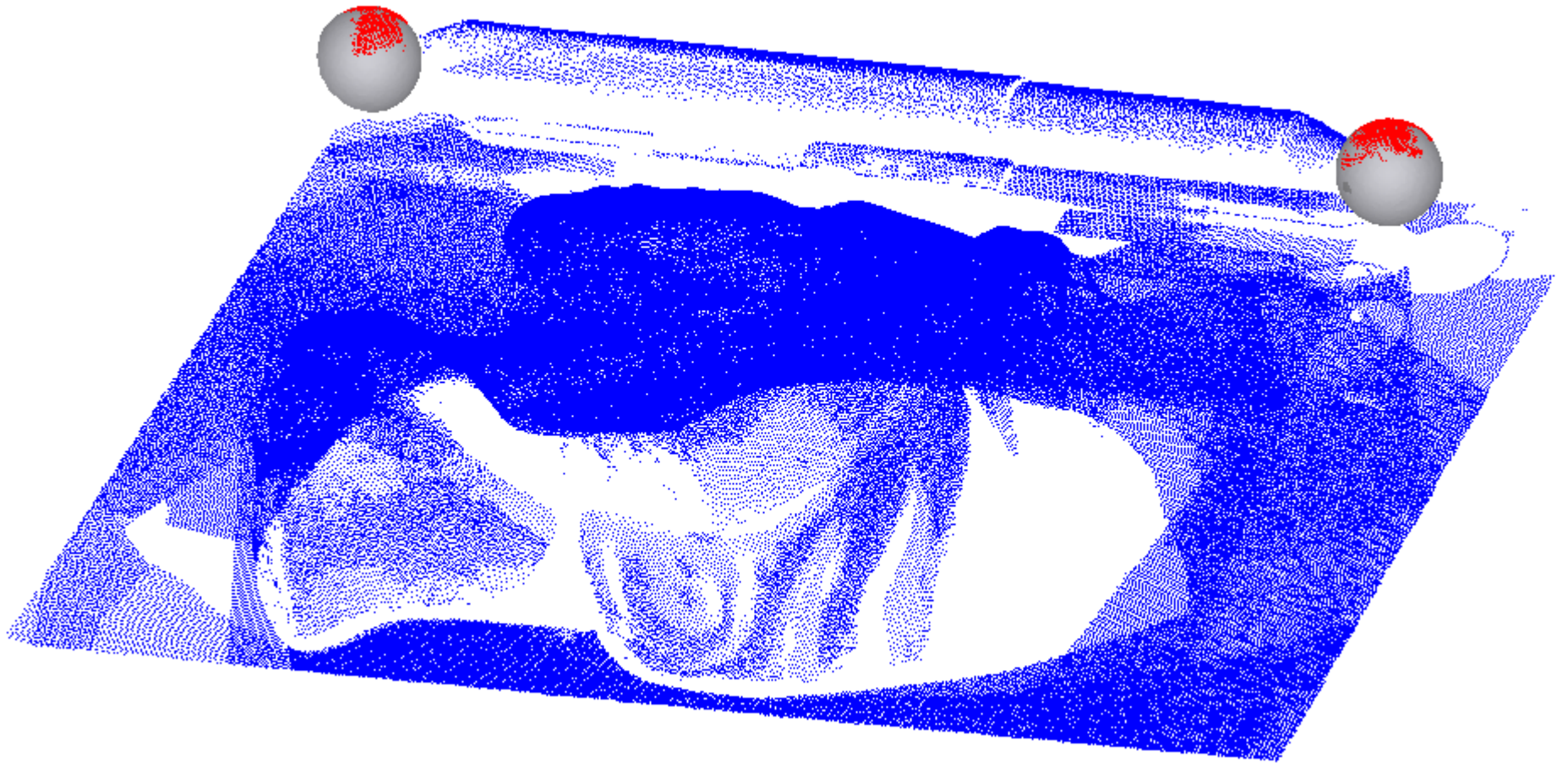
nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Kegelfitting

Härteprüfung nach Rockwell (DIN 50103)

Iteration	RMS	dRMS _{relativ}	φ
0	0.669		90.0°
1	0.654	0.0227	101.4°
2	0.645	0.0137	126.2°
3	0.072	0.8883	119.9°
4	0.013	0.8139	122.3°
5	0.00299126	0.7769	117.89°
6	0.00262962	0.1209	117.5039°
7	0.00262932	0.000111	117.497485°
8	0.00262932	1.10316e-06	117.497662°

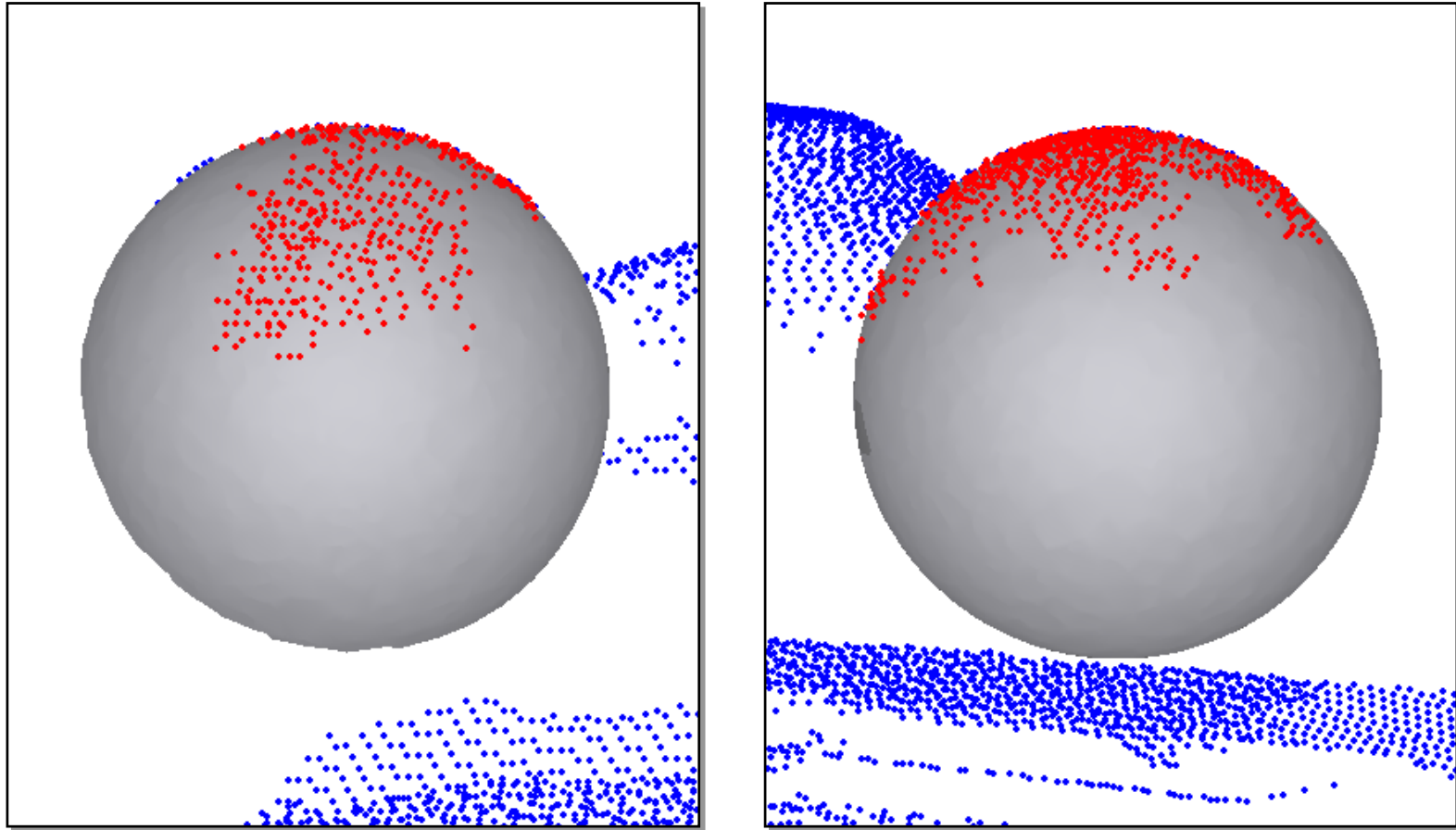


nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Kugelfitting



Rohpunktwolke, Kugelmessung auf Kalibrierkörper

nichtlineares Zielfunktional, Beispiel Kugelfitting



Kugelmessung, Detailansichten

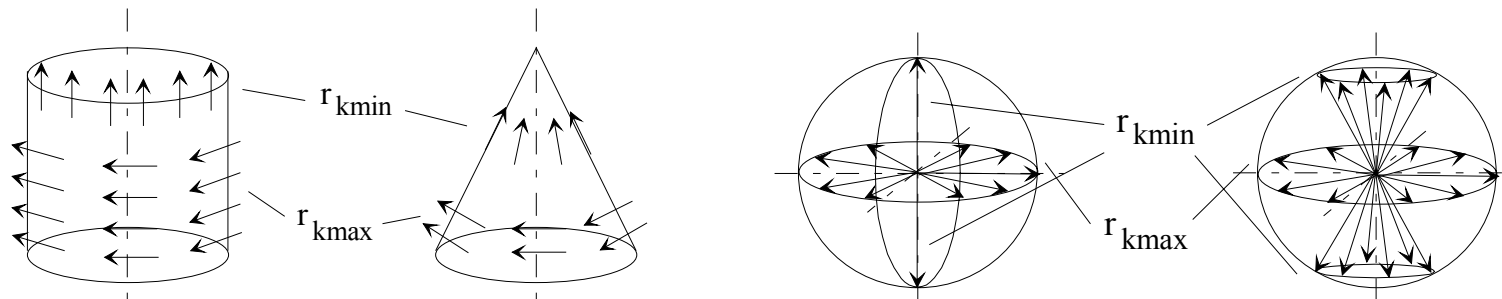
Bereitstellung von Startwerten

- ▶ manuelle Vorgabe: Nutzung von a-priori-Wissen über Messsituation und Messobjekt
- ▶ lineare Näherungsverfahren für Kreis, Kugel und Ellipse
- ▶ generische Generierung (zufällige Auswahl von Startparametern und repräsentativen Teilpunktmenen, Parameterberechnung für jede Teilpunktmenge, Startwert wird der Parametersatz mit dem kleinsten Fehler)
- ▶ Auswertung der Messpunktstatistik
 - ▶ Vollkreis, -ellipse, -kugel, -torus: Mittelpunkt der Formelemente aus Schwerpunkt, Radien durch Auswertung der Relation einzelner Messpunkte zum Zentrum
 - ▶ Formelemente mit ausgeprägter Verteilung der Messpunkte in eine Richtung: Achslage aus Parametern der Hauptachsentransformation
- ▶ Berechnung von Parametern anhand einer minimalen Messpunktanzahl
- ▶ Zylinder, Kegel, Torus: Reduktion auf 2D-Formelemente durch Projektion von räumlichen Schnittmengen, Selektion anhand Approximationsfehler, Kombination der Parameter der 2D-Formelemente

Bereitstellung von Startwerten

- ▶ Zylinder, Kegel und Torus: Berechnung der Hauptkrümmungsrichtungen von lokalen Teilpunkt Mengen, Ableitung der Parameter aus der resultierenden Gaußkugel

Hauptkrümmungen k_{\max} , k_{\min} , Hauptkrümmungsrichtungen $r_{k\max}$, $r_{k\min}$ am Beispiel von Kegel und Zylinder:



Formelement	Form auf Gaußkugel	k_{\min}	$r_{k\max}$ (\perp zu $r_{k\min}$)
Kreiszyylinder \underline{h} , \underline{a} , \underline{r}	1 Kreis(segment) (rad=1), Punkte an den Polen	0	\vec{a}
Kreiskegel \underline{m} , \underline{a} , Φ	3 Kreis(segmente), $\text{rad}_{\max}=1$, $\text{rad}_{\min}<1$	0	$\vec{p} - \vec{m}$

Adaptive Ausgleichsrechnung

→ Problem

- ▶ Punktwolken (insbesondere optisch antastende Messverfahren) enthalten Ausreißer
- ▶ Fittingverfahren setzen eine korrekte Segmentierung der zum betreffenden Geometrieelement gehörenden Messpunkte voraus

→ interaktive und manuelle Ausreißerdetektion bzw. Segmentierung der Messpunkte durch den Anwender ist zeitaufwendig und nicht objektiv

→ notwendig ist zumindest eine teilautomatische Detektion der Regelgeometriepunkte

→ Lösung

- ▶ iteratives Verfahren der adaptiven Ausgleichsrechnung, gekennzeichnet durch Gewichtung der einzelnen Messpunkte je nach Zugehörigkeit zum Geometrieelement
- ▶ Voraussetzung ist Grobsegmentierung

Adaptive Ausgleichsrechnung

→ **Ansatz: Einführung von Gewichten w_k pro Messpunkt, diese geben die Zugehörigkeit zum Geometrieelement an**

→ **Zielfunktion** $\sum_{k=1}^K d_k^2 \rightarrow \text{Minimum}$ mit $d_k^2 = Z(\vec{a}, \vec{x}_k) \cdot w_k$

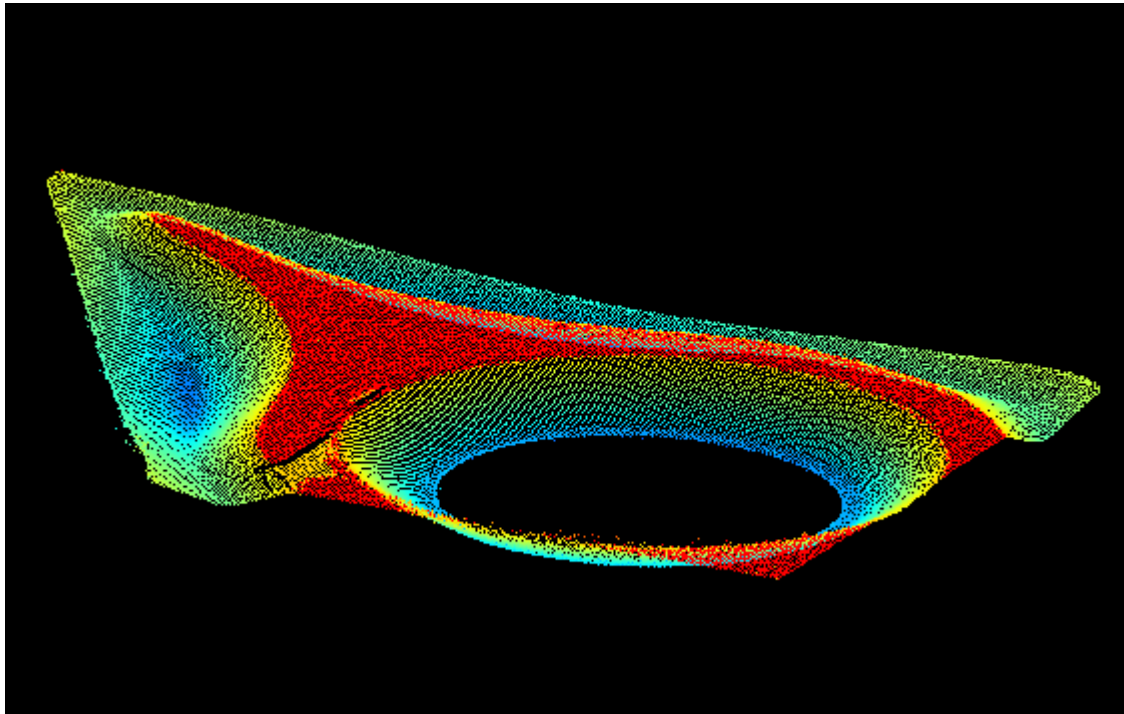
→ **nach dem Gesetz der Großen Zahlen wird angenommen, daß die Defekte normalverteilt sind, Einführung der Dichtefunktion φ**

$$\varphi(d_k, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_k^2 - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_k^2 \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (d_k^2 - \mu)^2}$$

→ **Gewichtsberechnung** $w_k = \varphi(d_k, \mu, \sigma) / \sum \varphi_k$ mit $\sum \varphi_k = \sum_{k=1}^K \varphi(d_k, \mu, \sigma)$

→ **Abbruchkriterien analog nichtlineare Iterationsverfahren, zusätzlich Mindestpunktanzahl $n_{p_{\min}}$**

Adaptive Ausgleichsrechnung

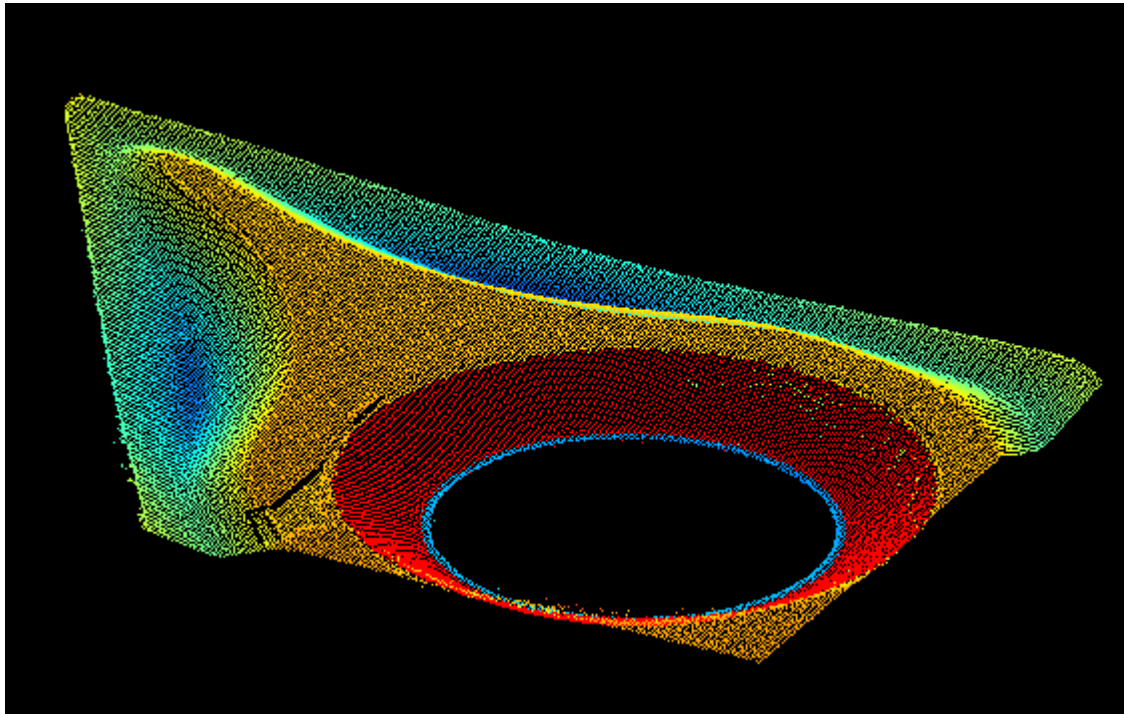


Ebenensegmentierung, Beispiel Wendeschneidplatte

rot: segmentierte Punkte

Zielzustand nach 12 Iterationen

Adaptive Ausgleichsrechnung



Kugelsegmentierung, Beispiel Wendeschneidplatte
rot: segmentierte Punkte
Zielzustand nach 8 Iterationen

Softwarebibliothek: Implementationsstand (1/2)

Verfahrensgruppe	Ausgleich aller Parameter	Ausgleich mit fixen Parametern	Formelementpunkte vorgegeben	Feinsegmentierung
Formelement				
2D-Gerade	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
Kreis	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
Ellipse	vorhanden	vorhanden	nicht vorhanden	vorhanden
2D-Quadrik	vorhanden			vorhanden
Ebene	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
3D-Gerade	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
Kugel	vorhanden	vorhanden	vorhanden	vorhanden
Zylinder	vorhanden	vorhanden	teilweise vorhanden	vorhanden
Kegel	vorhanden	vorhanden	teilweise vorhanden	vorhanden
Torus	vorhanden	vorhanden	nicht vorhanden	vorhanden
3D-Quadrik	vorhanden			vorhanden

verfügbare Verfahren nach Verfahrensgruppe und Art des Geometrieelements

Softwarebibliothek: Implementationsstand (2/2)

Verfahrensgruppe	Ausgleich aller Parameter	Ausgleich mit fixen Parametern	Formelementpunkte vorgegeben
Formelement			
2D-Gerade	linear	linear	linear
Kreis	nichtlinear (lineare Näherung)	abhängig von konkreter Parameterkombination	nichtlinear
Ellipse	nichtlinear (lineare Näherung)	nichtlinear	-
Ebene	linear	linear	linear
3D-Gerade	linear	abhängig von konkreter Parameterkombination	linear
Kugel	nichtlinear (lineare Näherung)	abhängig von konkreter Parameterkombination	nichtlinear
Zylinder	nichtlinear	abhängig von konkreter Parameterkombination	abhängig von konkreter Parameterkombination
Kegel	nichtlinear	abhängig von konkreter Parameterkombination	abhängig von konkreter Parameterkombination
Torus	nichtlinear	abhängig von konkreter Parameterkombination	-

mathematische Ansätze nach Verfahrensgruppe und Art des Geometrieelements

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.