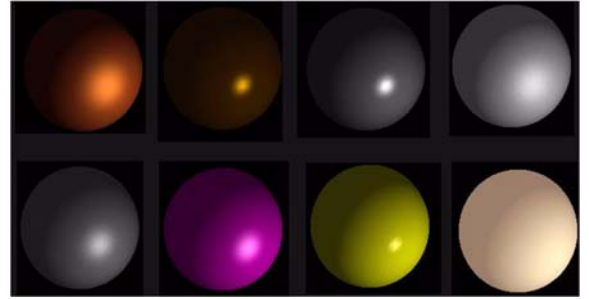


Beleuchtung und Schattierung

Privatdozent (PD) Dr.-Ing. habil. K.-H. Franke

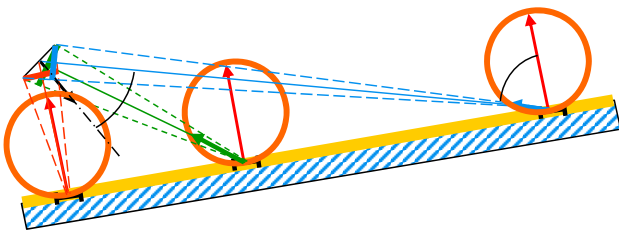
Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Informatik und Automatisierung
Institut für Prakt. Inf. und Medieninf.

Fachgebiet Graphische Datenverarbeitung



ZBS, Werner-von-Siemens-Str. 10, Sekretariat, Monika Stübchen,
Tel.: (03677) 6897 680
oder Sekretariat FG GDV, Frau Franziska Katzki, Zusebau, Zi. 2039,
Tel.: (03677) 69 4119

Tel.: (03677) 6897-681
(0172) 36 27 701
Fax: (03677) 6897-682
email: karl-heinz.franke@tu-ilmenau.de
Internet: <http://www.zbs-ilmenau.de>



Ilmenau, 02.11.2013

■ Computergrafik - Beleuchtung / Schattierung: PD Dr.-Ing. habil. K.-H. Franke ■ CG_KHF_V7 - 1 -
ISSN 1432-3346

Licht und Material (Inhalt)

- ▶ Einleitung: Beleuchtung und Beleuchtungsmodelle - Grundeigenschaften und Vereinfachungen
- ▶ Definitionen und Grundbegriffe
- ▶ Lichtquellen und beleuchtete Flächen
 - Ambiente Strahlung
 - Parallele Strahlung
 - Ideale Punktlichtquelle
 - Gerichtet diffuser Strahler (+ Spotlight + diffuse Punktquelle nach Warn)
 - Flächenhaft ausgedehnte, diffuse Lichtquellen
- ▶ Reflexion
 - Reflexionsarten (Übersicht)
 - Remittierende Flächen (physically based, COOK and TORRANCE)
 - Beispiel: Phong-Modell (monochromatisch)
 - Bidirektionale Reflektivität, BRDF (bidirectional reflectivity)

■ Computergrafik - Beleuchtung / Schattierung: PD Dr.-Ing. habil. K.-H. Franke ■ CG_KHF_V7 - 2 -
ISSN 1432-3346

Licht und Material (Inhalt)

- ▶ Spektrales Sampling, Farbe bei der Beleuchtung und Schattierung
 - Vereinfachte Modelle für farbige Lichter und Oberflächen
 - Spektrales Sampling
 - spektrales Sampling der Spektralwertkurven ($r_{\text{ebu}_{VR}}$, $r_{\text{ebu}_{VG}}$, $r_{\text{ebu}_{VB}}$, $g_{\text{ebu}_{VR}}$, $g_{\text{ebu}_{VG}}$, $g_{\text{ebu}_{VB}}$, $b_{\text{ebu}_{VR}}$, $b_{\text{ebu}_{VG}}$, $b_{\text{ebu}_{VB}}$)
 - Objektremittanzen O_R , O_G , O_B aus $\beta(\lambda)$
 - Intensitäten I_R , I_G , I_B aus $S(\lambda)$ z.B. für Normlichtquellen
 - Beispiele für vereinfachte Farbmodelle
 - Probleme durch einfaches spektrales Sampling (Bewertung)

Beleuchtung und Beleuchtungsmodelle Grundeigenschaften und Vereinfachungen

- ▶ Betrachtet wird Strahlung aus dem sogenannten optischen Strahlungsspektrum, insbesondere das sichtbare Spektrum (Licht). Für die Ausbreitung dieser Strahlung gilt:
 - ✓ Licht breitet sich im Vakuum und in Räumen mit einheitlichem Brechungsindex geradlinig aus (wir werden uns vorerst darauf beschränken).
 - ✓ Die Richtung des Lichtes ändert sich beim Übergang zwischen Körpern mit unterschiedlichem Brechungsindex.
 - ✓ Neben Brechung treten Reflexion, Beugung und Streuung auf.
- ▶ Man unterscheidet grundsätzlich zwischen *lokalen* und *globalen* Beleuchtungsmodellen.
 - ✓ Lokal: Es werden nur die Beleuchtungseffekte berücksichtigt, die direkt durch die Lichtquellen auf dem einzelnen lokalen Objekt entstehen (wir werden uns in diesem 3. Abschnitt=„Beleuchtung und Material“ darauf beschränken).
 - ✓ Global: Neben den lokalen Effekten werden auch die Wechselwirkungen zwischen den Objekten einer Szene beachtet, z.B. Schattenwurf, Spiegelungen von Objekten in Objekten, indirekte Beleuchtung usw. (darauf wird im 4. Abschnitt=Rendering eingegangen)

Beleuchtung und Beleuchtungsmodelle Grundeigenschaften und Vereinfachungen

- ▶ Licht- und Beleuchtungsgrößen können nur bei bekannter spektraler Zusammensetzung der Strahlung berechnet werden. Diese ändert sich im allgemeinen bei jeder Wechselwirkung mit Objekten (z.B. spektraler Remissionsgrad $\beta(\lambda)$). Das hat insbesondere Konsequenzen für die Farbwerte.
 - ✓ **Beleuchtungs- und Schattierungsrechnungen sind deshalb für den allgemeinen Fall mit spektralen Strahlungsgrößen durchzuführen** und erst danach in Bezug auf die Wahrnehmung zu bewerten.
 - ✓ Dies sichert die korrekte Berücksichtigung der wellenlängenabhängigen Wechselwirkung von Strahlung mit unterschiedlichen Materialien (Reflexion, ...)

Kritisch (!) zu bewertende Vereinfachungen:

- ✓ Bei **bekannter spektraler Zusammensetzung der Lichtquellen** (weiß, monochromatisch, breitbandig farbig, ...) **und grauen Körpern** (alle Wellenlängen werden in gleicher Weise modifiziert) kann die Schattierungsrechnung auch wellenlängenintegral oder photometrisch erfolgen.
- ✓ Körperfarben werden in der Computergraphik häufig durch vereinfachende Approximationen behandelt (z.B. drei Remissionswerte O_{VR} , O_{VG} , O_{VB} statt $\beta(\lambda)$).

Beleuchtung und Beleuchtungsmodelle Grundeigenschaften und Vereinfachungen

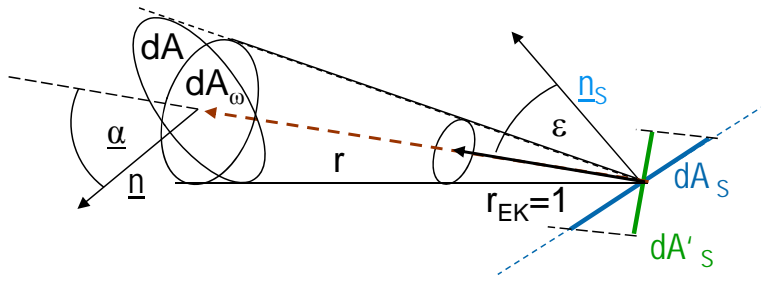
- ▶ In der Literatur zur Computergrafik wird die Beschreibung von Beleuchtungsphänomenen **oft so stark vereinfacht**, dass die Zusammenhänge nicht nur physikalisch, sondern auch **rein inhaltlich eher unklar** werden.
- ▶ **Foley weist auf diese Problem hin** (Foley90, S. 760, Kapitel „Physicalily Based Illumination Models“):
 - Thus far, we have used the word *intensity* without defining it, referring informally to the intensity of a light source, on a point on a surface, or of a pixel.
 - When we used the word *intensity* in reference to a point source, we were referring to its radiant intensity (Strahlstärke W/sr)
 - When we used the word *intensity* in reference to a surface, we were referring to its radiance (Strahldichte in $W/(sr \cdot m^2)$) usw.
- ▶ Besonders problematisch bei Wechselwirkungen:
 - Punktquelle bestrahlt Oberfläche, diese reflektiert diffus spekulär und bestrahlt so weitere Flächen.
→ die vorkommenden „Intensitäten“ dürfen nicht gleichgesetzt werden !!!



Hier soll sofort mit den richtigen Begriffen gearbeitet werden !

Beleuchtungsmodelle - Definitionen und Grundbegriffe

- Der Strahlungsfluss Φ_e ist die in Form von Strahlung abgegebene bzw. auftreffende Leistung.
- Raumwinkel ω , gemessen in Steradian (sr), ist die in Blickrichtung reduzierte (foreshortened) „kleine“ Fläche, projiziert auf die Einheitskugel.
- Strahlstärke I (radiant intensity) in W / sr: die in den Raumwinkel abgegebene Leistung
- Strahldichte L (radiance) in W / (sr·m²) ist die Strahlstärke pro reduzierter Strahlerfläche (foreshortened auf die Strahlungsrichtung).
- Bestrahlungsstärke E (irradiance, bestrahlte Fläche) oder spezifische Ausstrahlung (radiosity, strahlende Fläche) R in W / m², Bezug ist die unverkürzte (unforeshortened) Fläche.



$$E_e = \frac{d\phi_{eA}}{dA} = \frac{I_{e\varepsilon} \cdot d\omega}{dA}$$

$$d\omega = \frac{dA_\omega}{r^2} \cdot \omega_0 = \frac{dA}{r^2} \cdot \cos \alpha \cdot \omega_0$$

$$E_e = \frac{I_{e\varepsilon} \cdot \cos \alpha}{r^2} \cdot \omega_0$$

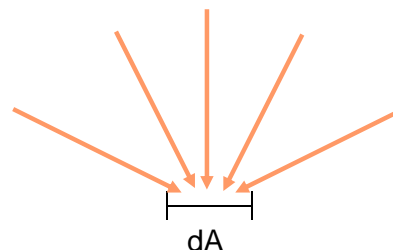
$$d\omega = \frac{dA_\omega}{r^2} \cdot \omega_0 \quad I_{e\varepsilon} = \frac{d\phi_{e\varepsilon}}{d\omega} \quad L_{e\varepsilon} = \frac{dI_{e\varepsilon}}{dA_s \cdot \cos \varepsilon}, \quad \text{Lambert: } \rightarrow dI_{e\varepsilon} = L_{e0} \cdot \cos \varepsilon \cdot dA_s$$

→ Systematik der Strahlungsquellen und bestrahlte Flächen

Lichtquellen und beleuchtete Flächen - Ambiente Strahlung

- Es ist *keine „eigentliche“ Quelle* zuordenbar.
- Stark vereinfachtes Modell für die Streuung der Atmosphäre, für viele „durchmischte“ Strahlungsquellen, für indirekte Reflexionen.
- Strahlung kommt von allen Seiten. *„Die Quelle ist überall und nirgends“*.
- Keine Abhängigkeit von Winkeln und Entfernungen.
- Beschreibung nur indirekt durch konstante Bestrahlungsstärke von Flächen möglich.*

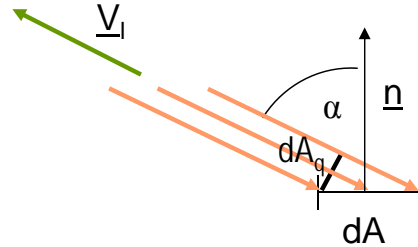
$$E_\lambda = \frac{d\Phi(\lambda)}{dA} = E_{a\lambda}$$



- Parallele Strahlung

- Die Strahlung ist *gerichtet und parallel* (kollimiertes Licht, Strahlungsquelle im Unendlichen, Sonnenlicht).
- Für derartige Quellen lässt sich ebenfalls kein Ort (aber uneigentlicher Ort, Richtung) angeben.
- Wichtig sind also die *Richtung* und die *Strahlungsleistung, bezogen auf die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehende Fläche* (spezifische Ausstrahlung oder *Radiosity* R_e).

$$R_\lambda = E_{\lambda q} = \frac{d\Phi(\lambda)}{dA_q}, \quad \underline{V_l}$$



- Für die Schattierungsrechnung lässt sich die Bestrahlungsstärke E_e der Oberfläche (Flächenelement dA) berechnen.

$$E_\lambda = \frac{d\Phi(\lambda)}{dA} = \frac{E_{\lambda q} \cdot dA_q}{dA} = E_{\lambda q} \cdot \cos \alpha = E_{\lambda q} \cdot \underline{V_l}^T \cdot \underline{n}$$

- Ideale Punktlichtquelle

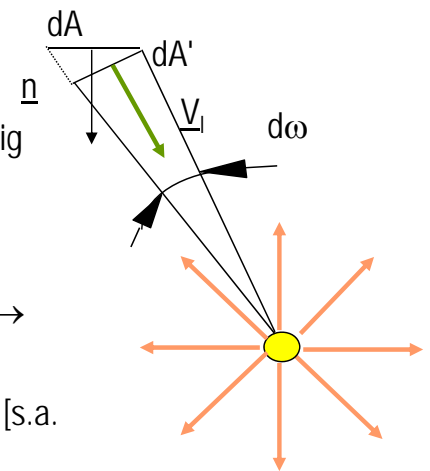
- Bei der Punktquelle ist der *Ort* bekannt.
- Für die Punktquelle ist die *Strahlstärke* in allen Richtungen konstant. Sie dient neben dem Ort deshalb zur Beschreibung der Punktquelle:

$$I_{\lambda q} = \frac{d\Phi_\lambda}{d\omega} = \text{const.}$$

- Die Bestrahlungsstärke eines physikalisch vorliegenden, beliebig orientierten Flächenelementes dA ergibt sich zu:

$$E_\lambda = \frac{d\phi_\lambda}{dA} = \frac{I_\lambda \cdot d\omega}{dA}, \quad d\omega = \frac{dA'}{r^2} \cdot \omega_0 = \frac{dA}{r^2} \cdot \cos \alpha \cdot \omega_0 \rightarrow$$

$$E_\lambda = \frac{I_\lambda}{r^2} \omega_0 \cos \alpha = \frac{I_\lambda}{r^2} \omega_0 \underline{V_l}^T \underline{n} \quad \text{light-source attenuation [s.a. Fo, S. 724]}$$



- Zum Ausgleich der Adaptionfähigkeit des menschlichen Auges wird in der Computergraphik oft der folgende Ansatz verwendet:

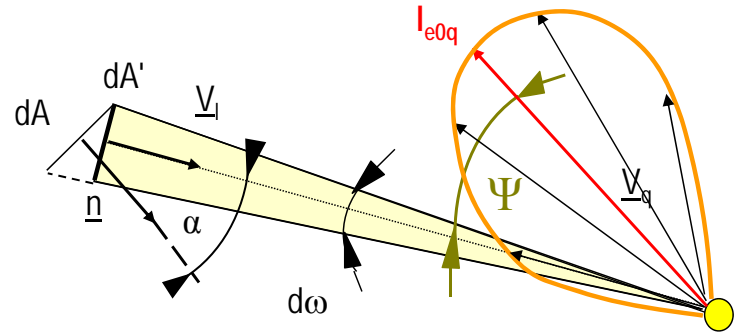
$$E_\lambda^* = \frac{I_\lambda}{c_1 + c_2 |r| + c_3 r^2} \omega_0 \cos \alpha$$

- Gerichtet diffuser Strahler

auch grob spekulärer Strahler oder goniometrische Lichtquelle genannt (improved point light source nach Warn und Phong /Foley90/)

- Der **Ort** der Quelle ist bekannt.
- Auch diese Quelle strahlt radial, d.h. die Strahlstärke ist eine geeignete Beschreibungsgröße.
- Im Gegensatz zur Punktquelle erfolgt die **Abstrahlung richtungsabhängig** (Strahlungskeule):
 - ✓ Hauptabstrahlrichtung \underline{V}_q
 - ✓ maximalen Strahlstärke I_{e0q}
 - ✓ Koeffizient m zur Modellierung der Strahlungskeule.

$$I_{\lambda,\psi} = I_{\lambda 0q} \cdot \cos^m \psi = I_{\lambda 0q} \cdot \left(\left(\underline{-V}_l^T \right) \cdot \underline{V}_q \right)^m$$



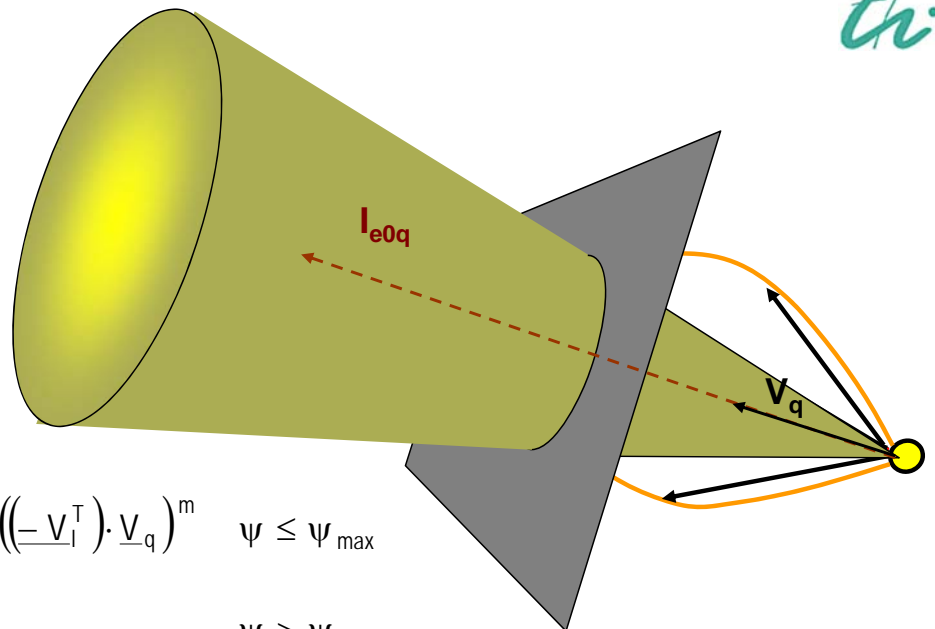
- Wie bei der Punktquelle ergibt sich:

$$E_\lambda = \frac{I_{\lambda 0q} \cdot \cos^m \psi}{r^2} \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha$$

$$E_\lambda^* = \frac{I_{\lambda 0q} \cdot \cos^m \psi}{c_1 + c_2 |r| + c_3 r^2} \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha$$

- Spotlight

- Beschneidung der abstrahlenden Keule durch eine Feldblende.
- maximaler Winkel Ψ_{\max}



$$I_{\lambda,\psi} = \begin{cases} I_{\lambda 0q} \cdot \cos^m \psi = I_{\lambda 0q} \cdot \left(\left(\underline{-V}_l^T \right) \cdot \underline{V}_q \right)^m & \psi \leq \Psi_{\max} \\ 0 & \psi > \Psi_{\max} \end{cases}$$

$$E_\lambda = \begin{cases} \frac{I_{\lambda 0q} \cdot \cos^m \psi}{r^2} \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha & \psi \leq \Psi_{\max} \\ 0 & \psi > \Psi_{\max} \end{cases}$$

- Diffuse Punktquelle (nach Warn)

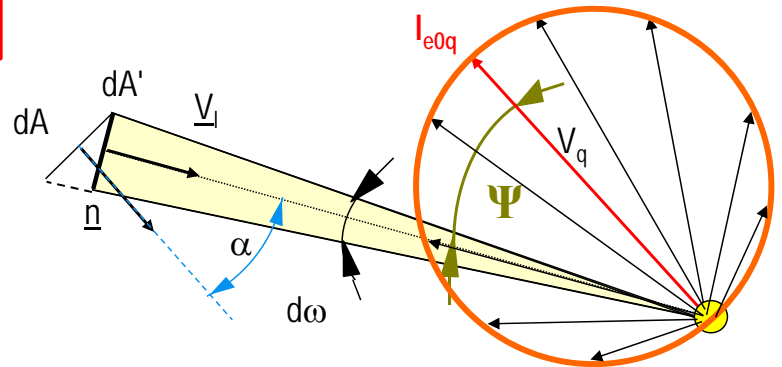
- Spezialfall des gerichtet diffusen Punktstrahlers
- Parameter: *Ort*, radiale Strahlung, *maximale Strahlstärke* I_{e0q} , *Hauptabstrahlrichtung* \underline{V}_q
- $m=1$ zur Charakterisierung der Strahlungskeule \rightarrow Strahlstärke entspricht dem *Lambertstrahler*, aber \rightarrow
- *Strahldichte L kann nicht angegeben werden (Unterschied zum Lambertstrahler)*

$$I_{\lambda,\psi} = I_{\lambda 0q} \cdot \cos \psi = I_{\lambda 0q} \cdot \left(\left(-\underline{V}_l^T \right) \cdot \underline{V}_q \right)$$

- Wie bei der Punktquelle ergibt sich:

$$E_\lambda = \frac{I_{\lambda 0q} \cdot \cos \psi}{r^2} \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha$$

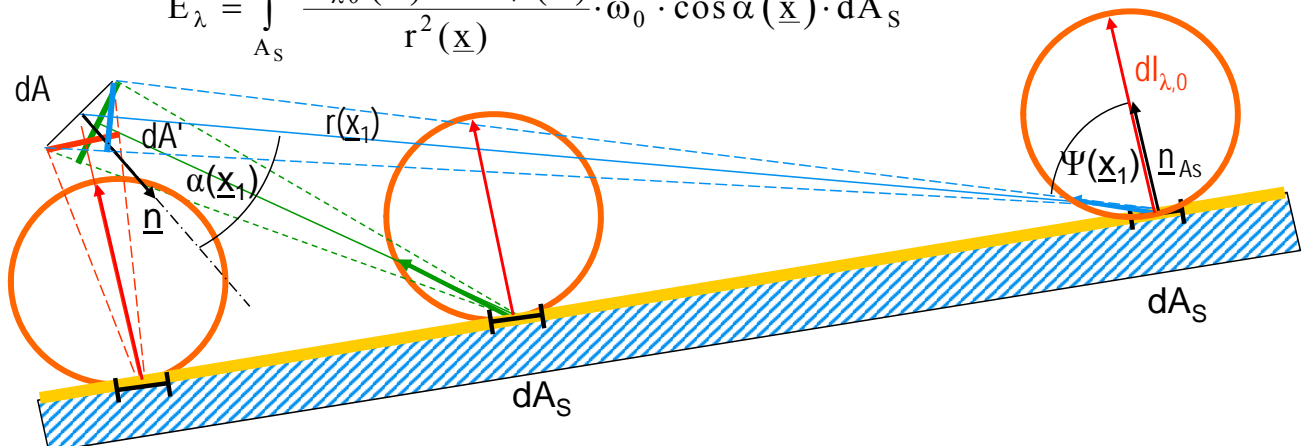
$$E_\lambda^* = \frac{I_{\lambda 0q} \cdot \cos \psi}{c_1 + c_2 |r| + c_3 r^2} \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha$$



- Flächenhaft ausgedehnte, diffuse Lichtquellen

- Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (d.h. beliebige Form der strahlenden Fläche) darf angenommen werden, dass die *Energieabstrahlung für ein kleines Flächenelement dA_S in den Halbraum* erfolgt. \rightarrow ambientes Licht, paralleles Licht und idealen Punktquelle sind als Modelle für dieses dA_S nicht geeignet.
- Beschreibung für dA_S erfolgt durch die restlichen o.g. Modelle, wobei die Hauptabstrahlrichtung in der Regel durch die Flächennormale \underline{n}_{AS} bestimmt ist und die Intensitätsgrößen flächenbezogen sind. Für Lambertstrahler: $dl_{\lambda,\psi(x)} = L_{\lambda 0}(x) \cdot \cos \psi(x) \cdot dA_S = L_{\lambda 0}(x) \cdot \left(\left(-\underline{V}_l^T(x) \right) \cdot \underline{n}_S \right) \cdot dA_S$
- Die Bestrahlungsstärke auf einer bestrahlten Fläche dA ergibt sich durch Integration über die Strahlerfläche.

$$E_\lambda = \int_{A_S} \frac{L_{\lambda 0}(\underline{x}) \cdot \cos \psi(\underline{x})}{r^2(\underline{x})} \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha(\underline{x}) \cdot dA_S$$



- Flächenhaft ausgedehnte diffuse Lichtquellen (Fortsetzung)

- kleine Ausdehnung des Flächenstrahlers (A_S) im Vergleich zum Abstand r und homogener Strahler ($\overline{L}_{\lambda 0}(\underline{x}) = \overline{L}_{\lambda 0} = \text{const.}$) \rightarrow
 $\psi(\underline{x}) = \overline{\psi} = \text{const.}$, $\alpha(\underline{x}) = \overline{\alpha} = \text{const.}$, $r(\underline{x}) = \overline{r} = \text{const.}$

$$E_\lambda = \int_{A_S} \frac{L_{\lambda 0}(\underline{x}) \cdot \cos \psi(\underline{x})}{r^2(\underline{x})} \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha(\underline{x}) \cdot dA_S = \frac{\overline{L}_{\lambda 0} \cdot \cos \overline{\psi}}{\overline{r}^2} \cdot \omega_0 \cdot \cos \overline{\alpha} \cdot A_S$$

- Wenn klar ist, wie die flächenbezogene Strahlungsleistung (Radiosity, für Strahler verwendetes Äquivalent zur Bestrahlungsstärke) in den Halbraum verteilt wird, kann der Flächenstrahler auch durch die Radiosity statt durch Strahlstärke oder Strahldichte beschrieben werden:**

Lambertstrahler (ideal diffus) \rightarrow $L_{\lambda 0}(\underline{x}) = \frac{R_\lambda(\underline{x})}{\pi \cdot \omega_0}$

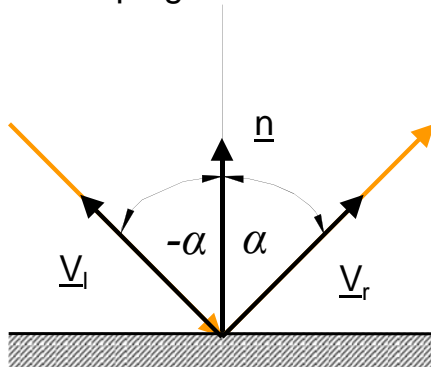
Phong Modell für diffus gerichteten Strahler \rightarrow $L_{\lambda \text{ max}}(\underline{x}) = \frac{R_\lambda(\underline{x}) \cdot (n + 1)}{2\pi \omega_0}$

Zum Zusammenhang $L \leftrightarrow R$ im folgenden Kapitel „Reflexion“. (Beachte! Jede reflektierende Fläche kann zugleich als Strahler für die weitere Ausbreitung der Strahlung betrachtet werden)

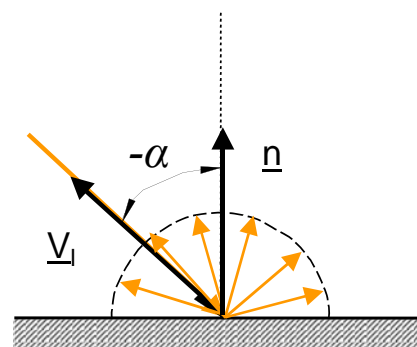
Reflexionsarten (Übersicht)

- Nach dem Auftreffen auf eine opake Oberfläche wird die Strahlung spektral unterschiedlich stark und geometrisch auf unterschiedliche Weise reflektiert. Für Letzteres gibt es im wesentlichen vier Modelle (zunächst schematisch für gerichtete Einstrahlung):

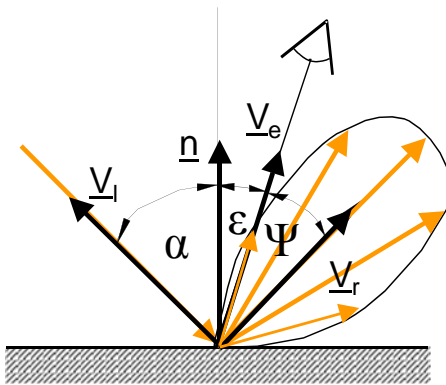
ideal spiegelnde Reflexion



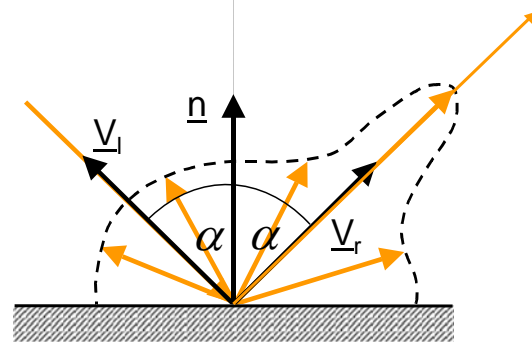
ideal diffuse Reflexion



diffus gerichtete Reflexion



gemischte Reflexion
ideal diffus, gerichtet diffus
und ideal spiegelnd



\underline{v}_i , \underline{v}_r und \underline{n} liegen in einer Ebene. Man beachte, dass \underline{v}_e im Allgemeinen außerhalb dieser Ebene liegt, d.h. die Winkel ψ und ϵ erscheinen in der Skizze projiziert.

- ▶ Bei der Betrachtung der Reflexion ist offensichtlich die Art der Bestrahlung und insbesondere auch die Richtung der Einstrahlung zu beachten.

Remittierende Flächen (physically based)

- ▶ *Wegen der spektralen Unterschiede* bei der Reflexion **bleiben wir bei den spektralen** physikalischen (radiometrischen) **Größen**!
- ▶ **Erst im Auge bzw. im Bildsensor erfolgt die Wandlung in die wellenlängenintegralen photometrischen (colorimetrischen) Größen!**

Zunächst **ideal diffus remittierende weiße Flächen** ($\beta(\lambda)=1$):

- Die von den Quellen in die Fläche dA eingetragene Leistung führt zu einer Bestrahlungsstärke E_λ
- Bei vollständiger Reflexion $\beta(\lambda)=1$ ist $E_\lambda = R_\lambda$ (spektrale Radiosity, spezifische spektrale Ausstrahlung in $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{nm}^{-1}$).
- Der **zugehörige spektrale Strahlungsfluss** $d\phi = R_\lambda \cdot dA = E_\lambda \cdot dA$ wird bei ideal diffusen streuenden Oberflächen **gleichmäßig über den Halbraum verteilt**, wobei die Strahldichte (Lambertsches Gesetz) konstant ist.

Remittierende Flächen (physically based, COOK and TORRANCE)

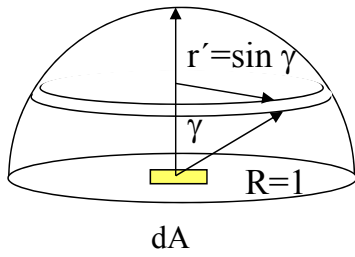
Abgestrahlte Leistung = eingetragene Leistung:

$$R_\lambda \cdot dA = d\Phi_\lambda = E_\lambda \cdot dA$$

Die konstante Strahldichte des Lambertstrahlers gemäß Definition für L:

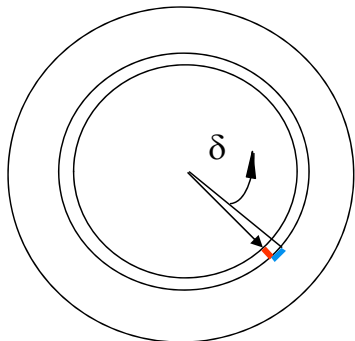
$$L_{\lambda 0} = L_{\lambda \gamma} = \text{const} = \frac{d^2\Phi_\lambda}{d\omega dA \cos \gamma}$$

$$L_{\lambda 0} = \frac{dR_\lambda}{d\omega \cdot \cos \gamma} = \frac{dE_\lambda}{d\omega \cdot \cos \gamma}$$



$$E_\lambda = \int_{\text{Einheitshalbkugel}} L_{\lambda 0} \cdot \cos \gamma \cdot d\omega$$

$$= 2\pi \cdot L_{\lambda 0} \cdot \omega_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \gamma \Big|_0^{\pi/2} = \pi \cdot L_{\lambda 0} \cdot \omega_0$$



$$L_{\lambda 0} = \frac{E_\lambda}{\pi \cdot \omega_0}$$

Remittierende Flächen (physically based)

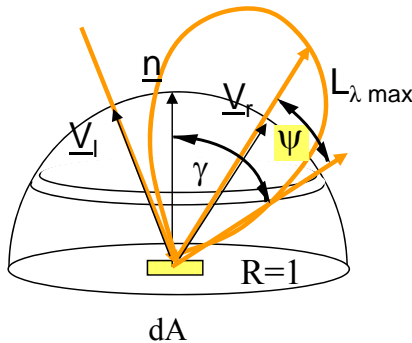
- Zur Berechnung der von der reflektierenden Fläche weitergegebenen Strahldichte $L_{\lambda 0}$ sind die weiter oben berechneten Bestrahlungsstärken E_λ für die unterschiedlichen Quellen mit dem Faktor $\beta(\lambda)/\pi\omega_0$ zu bewerten:

Quelle	Reflexion	Spektrale Strahldichte	$L_{\lambda 0}(\lambda)$
ambient	diffus	$L_{\lambda 0}(\lambda) = \frac{E_\lambda(\lambda)}{\pi \omega_0} \cdot \beta(\lambda)$	
gerichtet	diffus	$L_{\lambda 0}(\lambda) = \frac{E_{\lambda q}(\lambda)}{\pi \omega_0} \cdot \cos \alpha \cdot \beta(\lambda)$	
punktförmig	diffus	$L_{\lambda 0}(\lambda) = \frac{l_\lambda(\lambda)}{\pi r^2} \cdot \cos \alpha \cdot \beta(\lambda)$	
gerichtet diffus	diffus	$L_{\lambda 0}(\lambda) = \frac{l_{\lambda 0q}(\lambda)}{\pi r^2} \cdot \cos^m \psi \cdot \cos \alpha \cdot \beta(\lambda)$	

Remittierende Flächen (physically based)

Gerichtet diffus remittierende weiße Flächen ($\beta(\lambda) = 1$)

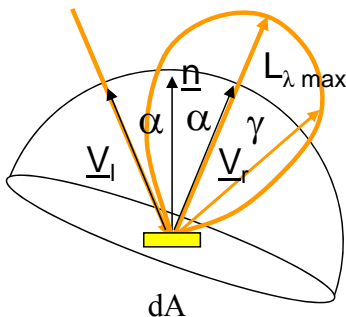
- Unterschied zum gerichtet diffusen Strahler* \rightarrow Hauptabstrahlrichtung hängt von der Richtung der Lichteinstrahlung ab (\underline{v}_r statt \underline{v}_q , Einfallswinkel = Ausfallswinkel in der Ebene mit $\underline{v}_l \times \underline{n}$)



Remittierende Flächen (physically based)

Gerichtet diffus remittierende weiße Flächen ($\beta(\lambda) = 1$)

- Unterschied zum gerichtet diffusen Strahler* \rightarrow Hauptabstrahlrichtung hängt von der Richtung der Lichteinstrahlung ab (\underline{v}_r statt \underline{v}_q , Einfallswinkel = Ausfallswinkel in der Ebene mit $\underline{v}_l \times \underline{n}$)
- Vereinfachte Berechnung (Näherung) durch Drehung des Halbraumes in Richtung von \underline{v}_r $\rightarrow \Psi = \gamma$



$$E_\lambda = \int_{\delta=0}^{2\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi/2} L_{\lambda \max} \cos^n \gamma \cdot \sin \gamma \cdot \omega_0 d\delta d\gamma$$

$$= - \frac{2\pi L_{\lambda \max} \omega_0}{n+1} \cdot \cos^{(n+1)} \gamma \Big|_{\gamma=0}^{\pi/2}$$

$$L_{\lambda \max} = \frac{E_\lambda \cdot (n+1)}{2\pi \omega_0}$$

$$L_{\lambda \psi} = \frac{E_\lambda \cdot (n+1)}{2\pi \omega_0} \cdot \cos^n \psi$$

Phong-Modell für die „spekulare Keule“

► Für beliebiges $\beta_{gd}(\lambda)^{**} \rightarrow$

$$L_{\lambda \psi} = \frac{E_\lambda \cdot (n+1) \cdot \beta_{gd}(\lambda)}{2\pi \omega_0} \cdot \cos^n \psi$$

- Das Verhältnis von reflektierter Strahldichte (radiance) $L_{\lambda,r\Psi}$ in irgendeine Richtung Ψ zur einfallenden Bestrahlungsstärke (irradiance) $E_{\lambda,i\alpha}$ aus einer anderen Richtung α wird „bidirectional reflection distribution function“ (BRDF) genannt.

$$\rho(\lambda) = \frac{L_{\lambda,r\Psi}}{E_{\lambda,i\alpha}}, \quad [\rho(\lambda)] = \frac{1}{sr}$$

(Index r steht für reflection, Index i für incidence, alle benötigten Größen waren weiter oben angegeben)

Eigenschaften der BRDF:

- Reziprozität: $\rho(\lambda)$ ändert sich nicht, wenn Einfalls- und Ausfallsrichtung vertauscht werden (wichtig für Ray-Tracing).
- $\rho(\lambda)$ ist aber manchmal anisotrop, d.h. der Anteil des reflektierten Lichtes ändert sich, wenn bei gleicher Einfalls- und Ausfallsrichtung die Fläche um die Normale gedreht wird (Textilien, Metalleffektlacke)
- Superposition gilt, d.h. mehrere Quellen überlagern sich linear.

- Es ist in der Computergrafik üblich, die *bidirektionale Reflektivität als Gemisch von diffusen und spekularen Komponenten* aufzufassen und einen *ambienten Anteil* zu addieren (Foley, S. 763):

$$L_{\lambda,r\Psi} = \rho_a(\lambda) \cdot E_{a\lambda} + \sum_{1 \leq j \leq Q} E_{\lambda,i_j\alpha_j} \cdot (k_d \cdot \rho_d(\lambda) + k_s \cdot \rho_{s_j})$$

$$k_d + k_s = 1$$

$Q = \text{Anzahl der Lichtquellen}$

Achtung: ρ_{s_j} ist für jede Quelle anders, denn man schaut bei fester Blickrichtung jedes mal anders in die spekulare Keule der jeweiligen Quelle. Außerdem ist ρ_{s_j} meist unabhängig von der Wellenlänge, d.h. der spekulare Reflex behält die Farbe der Lichtquelle (Ausnahme z.B. Kupfer) !

Beispiel: Phong-Modell (monochromatisch)

- zur Veranschaulichung der spekularen Reflexion nach dem Phong-Modell ($\cos^n \Psi$ -Term) wird *vereinfachend* ein monochromatischer / achromatischer Fall (*schmalbandig oder weiße Beleuchtung und unbuntes Objekt; ambientes Licht und nur eine Punktquelle*) betrachtet:

$$L_{\lambda, r, \psi} = c_{\text{amb}} \cdot \frac{\beta(\lambda)}{\pi \cdot \omega_0} \cdot E_{\text{amb}} + \frac{I_{\lambda}(\lambda)}{\pi \cdot r^2} \cdot \cos \alpha \cdot \left[c_{\text{diff}} \cdot \beta(\lambda) + c_{\text{spec}} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \beta_{\text{spec}}(\lambda) \cdot \cos^n \psi \right]$$

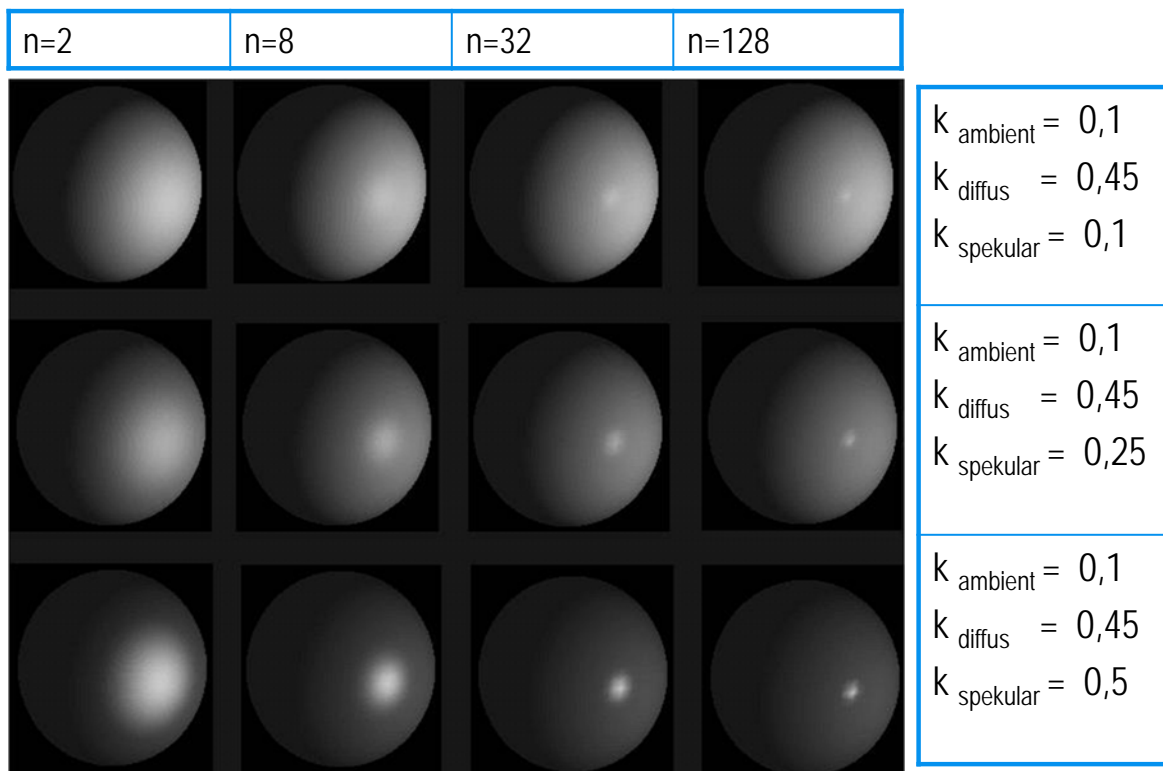
- Mit den Vereinfachungen und zusammengefasst:

$$L_{r, \psi} = E_{\text{amb}} \cdot k_{\text{amb}} + f_{\text{att}} \cdot I_{\text{punkt}} \cdot (k_{\text{d}} + k_{\text{s}} \cdot \cos^n \psi)$$

mit $k_{\text{amb}} = \frac{c_{\text{amb}} \cdot \beta}{\pi \cdot \omega_0}$, $f_{\text{att}} = \frac{1}{r^2}$ oder $f_{\text{att}} = \frac{1}{c_1 + c_2 \cdot |r| + c_3 \cdot r^2}$

$$k_{\text{d}} = c_{\text{diff}} \cdot \frac{\cos \alpha}{\pi} \cdot \beta, \quad k_{\text{s}} = c_{\text{spec}} \cdot \frac{(n+1) \cdot \cos \alpha}{2\pi} \cdot \beta$$

Beispiel: Phong-Modell (monochromatisch)



Phong-Beleuchtungsmodell